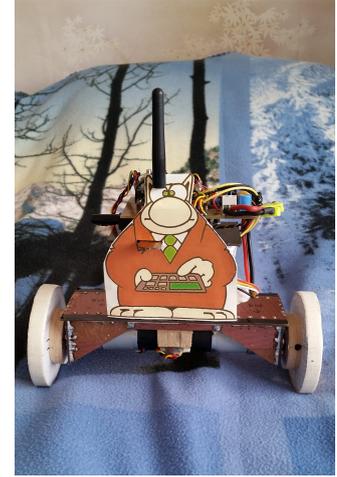


## *Petit et Large Le Chat Gyropode*



### **Pourquoi ce projet ?**

C'est une idée un peu folle de tester si mes capacités actuelles me permettraient de réaliser un petit gyropode. Je le voulais fabriqué à partir de modules « élémentaires » : 2 moteurs à courant continu, un contrôleur de puissance qui module en largeur d'impulsion la tension d'un petit accumulateur lithium-polymère (LiPo) à 3 éléments, un capteur d'inclinaison, et un module de type Arduino pour gérer les informations des capteurs et asservir les moteurs afin que ce dispositif instable de nature devienne stable, debout sur ses roues, qu'il puisse se déplacer d'avant en arrière et s'orienter dans sa progression.

### **Pourquoi ce texte ?**

Le résultat que j'ai obtenu m'a surpris (dans le bon sens !). Une petite vidéo d'environ une minute montre l'évolution de ce petit gyropode radiocommandé sur une terrasse extérieur dallée. On peut la voir actuellement à l'adresse suivante : <https://photos.app.goo.gl/icf3UPucWiUiO7s23>

Puisque je ne fais qu'une confiance assez limitée à ma mémoire, je décris ma démarche, mes calculs et mes mesures pour que dans quelques temps je me souvienne du chemin suivi au cours de ce projet.

Et si cette description peut donner des idées à d'autres personnes, pourquoi pas !  
Mais attention, ne pas tout prendre au sérieux, il y a des erreurs possibles.

### **Le « hardware »**

C'est un projet artisanal réalisé dans mon grenier, avec le matériel du bricoleur. Le matériel utilisé est donc plutôt sommaire, mais doit faire un assemblage fonctionnel de tous les éléments.

Ça sent le « bricolage » comme on le devine sur images insérées plus haut ! Il y a des fils pour faire les liaisons, des plaques d'époxy de circuits imprimés pour servir de support, ou pour réunir les connecteurs des signaux qui viennent des capteurs ou vont du microcontrôleur vers les commandes des moteurs. Il y a même des « bouts de bois »...

Plus sérieusement, voici les composants importants :

**Les moteurs** : Ce sont 2 moteurs de DFROBOT de référence FIT0186. Ils utilisent un réducteur d'un rapport de 43,8:1 qui permet d'avoir un axe de sorti tournant 251 tours/minute pour un tension d'alimentation de 12 volts, et un fort couple de blocage sous 7 ampères de 18 Kg.cm. Le suivi de la rotation se fait par des capteurs à effet Hall qui fournissent 2 signaux en échelon de 700 coups par

tour de l'axe, et dont la quadrature informe sur le sens de rotation. Toutes ces caractéristiques et les informations d'utilisation des signaux des capteurs de rotation sont expliquées à l'adresse : [https://www.dfrobot.com/wiki/index.php/12V\\_DC\\_Motor\\_251rpm\\_w/Encoder\\_\(SKU:\\_FIT0186\)](https://www.dfrobot.com/wiki/index.php/12V_DC_Motor_251rpm_w/Encoder_(SKU:_FIT0186))

**Le contrôleur des moteurs** : Des modules moins onéreux de DFROBOT, tel le module référencé DRI0002 pourrait peut-être satisfaire le fonctionnement usuel. Basé sur le circuit L298, le courant limite est de 2 ampères par moteur, or le courant de blocage de chaque moteur, sous 12 volts est annoncé à 7 ampères. Voulant être prudent, le contrôleur moteur choisi est un DFROBOT DRI0018 qui supporte 15 ampères par moteur. Chaque moteur est contrôlé indépendamment en tension par un signal logique modulé en largeur d'impulsion appliqué sur une broche d'entrée, et le sens de rotation est aussi commandé par l'état logique, haut ou bas, indépendamment pour chaque moteur sur une autre broche d'entrée. Les spécifications de la connectique et des exemples d'utilisation se trouvent à l'adresse :

[https://www.dfrobot.com/wiki/index.php/DC\\_Motor\\_Driver\\_2x15A\\_Lite\\_\(SKU:\\_DRI0018\)](https://www.dfrobot.com/wiki/index.php/DC_Motor_Driver_2x15A_Lite_(SKU:_DRI0018))

**Le microcontrôleur** : Celui qui est choisi fait partie des modules Arduino, c'est un M0. Ce microcontrôleur fonctionne à 48MHz et de façon native sur 32 bits. Il permet d'effectuer rapidement des multiplications de nombres flottants sur 64 bits. C'est cette précaution pour assurer la précision des calculs, qui a conduit à son choix, avec les faits qu'il dispose de nombreuses entrées d'interruptions, (utilisées pour traiter les signaux de capteurs de rotation des moteurs et des signaux du gyroscope-accéléromètre), et aussi parce que son prix d'achat est plutôt bas.

La programmation du microcontrôleur est faite en langage C – C++ de l'IDE d'Arduino. Toutes les caractéristiques de l'Arduino M0, la méthode de téléchargement, d'installation et d'utilisation de l'IDE sont expliquées sur le site : <https://www.arduino.cc/>

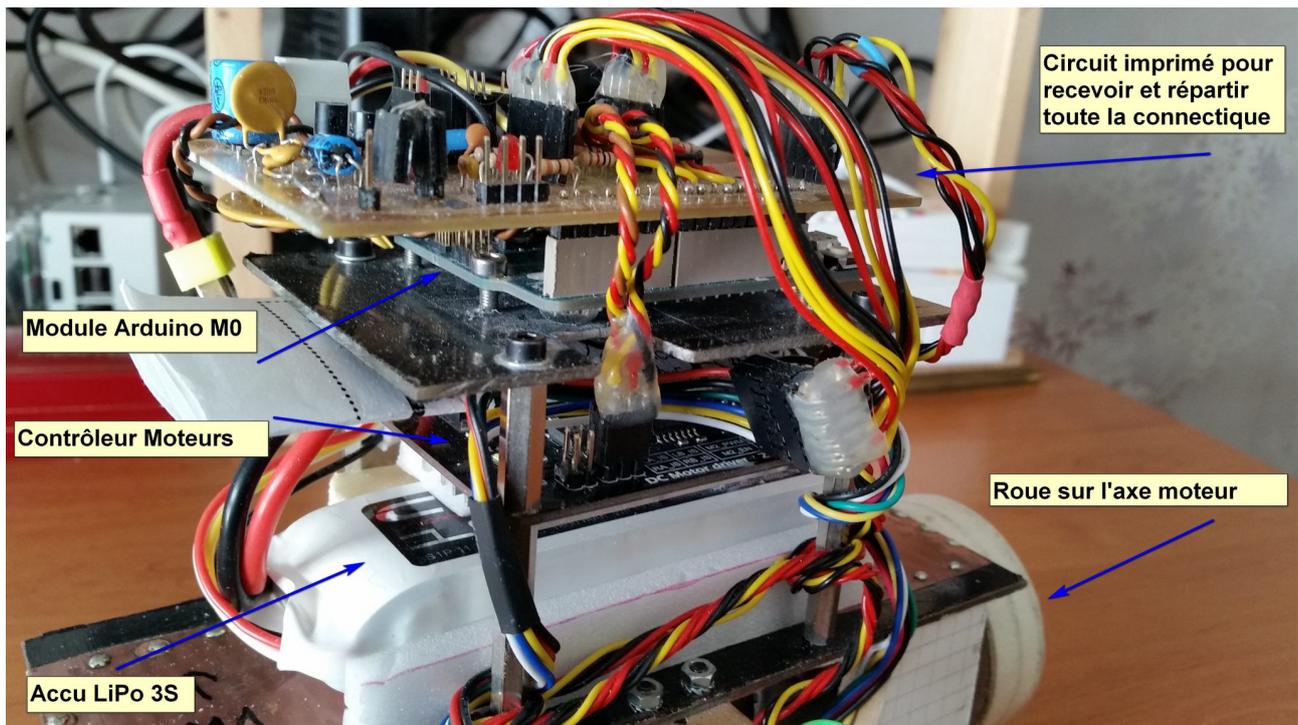
**Le gyroscope-accéléromètre** : Celui qui est choisi est le MPU6050. Il est facilement disponible à l'achat : DFROBOT SEN0142. Il communique par I2C et indique par un signal externe, toutes les 10 ms, que son calculateur interne dispose d'une nouvelle mesure de l'angle de rotation sur 3 axes, ainsi que la vitesse de rotation sur ces axes. Le gyropode n'aura besoin d'utiliser que les informations sur l'axe d'inclinaison avant-arrière, puisque le but est seulement de le stabiliser verticalement sur cet axe. L'inclinaison sur le côté ne peut avoir lieu car le gyropode repose sur ses 2 roues latérales.

L'utilisation directe des informations disponibles sur la liaison I2C est très complexe. Heureusement il existe une librairie pour Arduino qui simplifie un peu son utilisation. Il faut alors ajouter au répertoire Arduino, dans le répertoire « librairies » les fichiers fournis dans i2cdev.zip et mpu6050.zip qui se trouvent référencés sur différents sites.

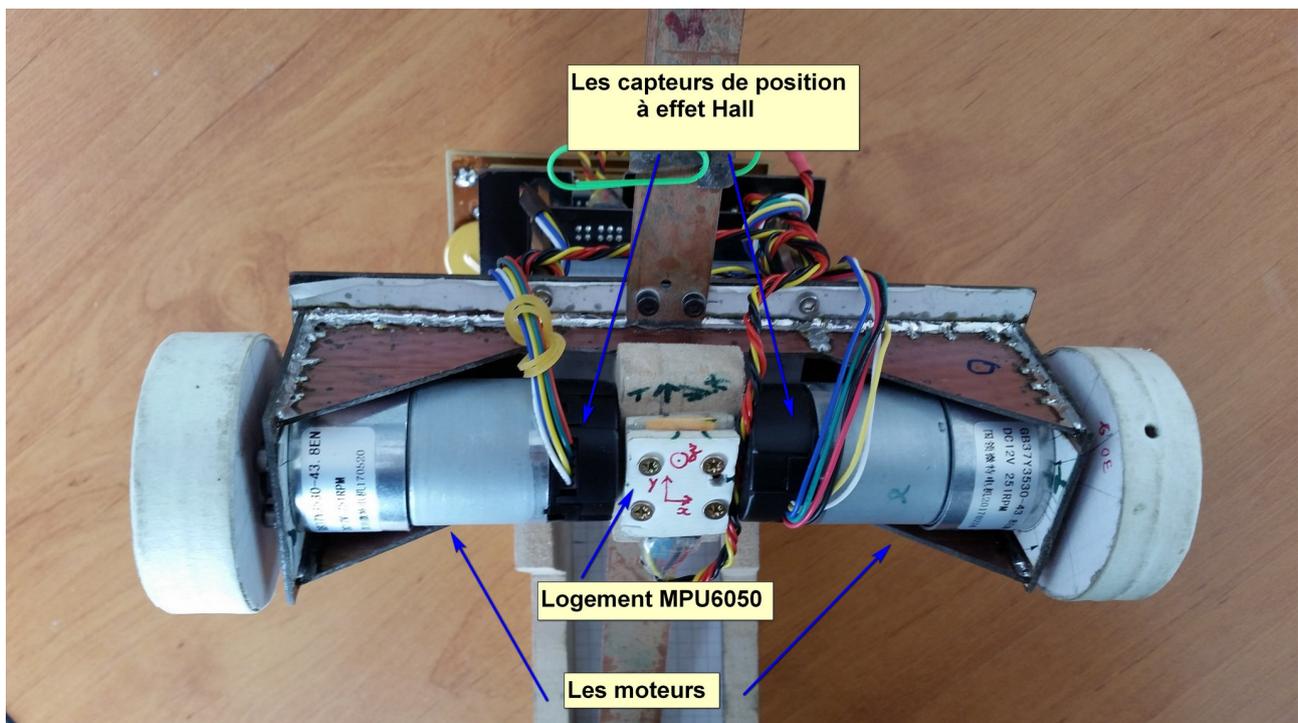
Par exemple : <http://gilles.thebault.free.fr/spip.php?article32> avec des exemples d'utilisation. (Personnellement j'ai dû intervenir sur quelques lignes de i2cdev qui n'étaient pas reconnues par le module Arduino M0, mais qui travaillaient parfaitement avec d'autres modules Arduino).

**L'accumulateur LiPo 3S** : Il fournit la tension d'alimentation d'environ 12 volts. C'est un accumulateur lithium-polymère de 3 éléments, d'une capacité de 1800 mA.h, de petite taille très largement utilisé en aéromodélisme, et très largement disponible sur tous les sites distributeurs de matériels de modélisme.

Et maintenant quelques images pour illustrer cet assemblage :



Les éléments du gyropode dans la partie supérieure.



Les éléments du gyropode dans la partie inférieure.

Note : Le gyroscope est placé auprès de l'axe de basculement.

# Description de la démarche qui recherche des conditions d'équilibre du gyropode.

## Sommaire :

- 1 Recherche des paramètres qui contrôlent l'action des moteurs sous l'influence des variations de la tension d'alimentation appliquée. C'est en fait la tension de commande de « l'actionneur ».
- 2 Équations du mouvement du robot soumis au champ de pesanteur et aux actions transmises par les axes moteurs sous forme de moment de rotation et de force de translation horizontale. Traitement des équations par le logiciel disponible librement de Mathematica sur OS Raspbian et utilisé sur Raspberry Pi. Cette étude permet d'obtenir les équations d'état du système.
- 3 Recherche de la matrice de représentation d'état et des coefficients d'un retour d'état afin de contrôler les moteurs pour maintenir l'équilibre du robot dans sa position « debout ».
- 4 Élaboration et implantation du programme Arduino pour la gestion de la puissance et du sens de rotation du moteur . Il assure l'équilibre et le déplacement du gyropode mobile.

## 1. Caractérisation du moteur FIT0186.

### Informations du constructeur :

Rapport du réducteur :	48,8/1
Tension nominale :	12 volts
Tours/minute à vide :	251 tr/mn
Courant à vide :	0,35 ampère
Courant de blocage :	7 ampères
Couple de blocage :	250 oz.inch = 1,765 N.m

### Déduction des paramètres moteur d'après ces données :

Note : Toutes les valeurs numériques utilisées sont celles qui apparaissent sur l'axe moteur, après le réducteur.

Un premier paramètre identifié est la résistance de rotor du moteur, elle est notée  $R_b$ . En cas de blocage, elle est la seule à limiter le courant. Ce courant vaut 7 ampères sous 12 volts, on en déduit la valeur de  $R_b = \frac{12 \text{ volts}}{7 \text{ Amperes}} = 1,714 \text{ ohm}$

Dans un moteur à courant continu, la force contre électromotrice interne développée par la rotation  $\omega$  (exprimée en radians par seconde) est proportionnelle à celle-ci. Elle est notée  $K_{mv}$ , telle que  $V_{fcm} = K_{mv} \times \omega$  . Pour une tension appliquée de 12 volts à vide, le courant de 0,35 A occasionne une chute de tension de  $0,35 \times 1,714 = 0,6 \text{ volt}$  , le reste est égal à  $V_{fcm}$ , soit

11,4 volts. La valeur de la rotation  $\omega$  de 251 tr/mn devient en radians par seconde :

$$\omega = \frac{251}{60} \times 2\pi = 26,28 \text{ rad/sec} , \text{ et la valeur de } K_{mv} = 11,4 \text{ volts} \times 26,28 = 0,434 \text{ V/(rad/sec)} .$$

Les propriétés magnétiques du moteur indiquent qu'il développe sur son axe un couple proportionnel au courant  $I_m$  qui le traverse . Le courant  $I_o = 0,35 \text{ A}$  mesuré à vide est considéré comme un courant de pertes. Au blocage du moteur, le courant utile est réduit à  $I_m = 7 - 0,35 = 6,65 \text{ Ampères}$  . On en déduit un coefficient de proportionnalité :

$$K_{mc} = \frac{1,7654 \text{ Newton.mètre}}{6,65 \text{ Amperes}} = 0,2655 \text{ N.m/A}$$

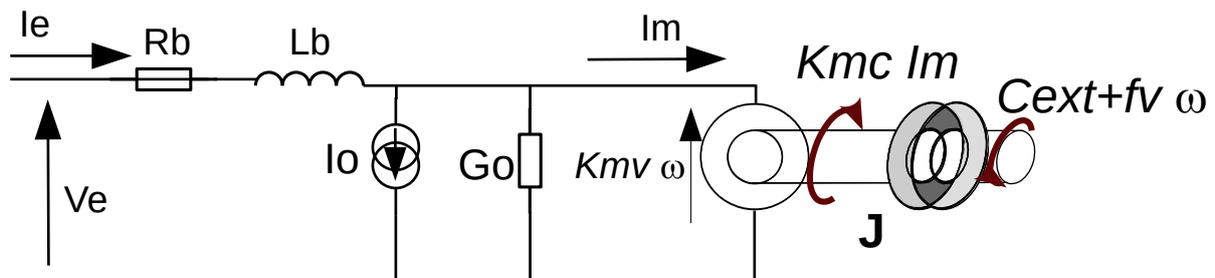
La théorie des moteurs à courant continu, fonctionnant de façon idéale, prévoit que les valeurs numériques des coefficients  $K_{mv}$  et  $K_{mc}$  soient les mêmes. La différence est ici notable, une vérification est utile, notamment pour une utilisation à plus faible courant, ce qui sera le cas ici.

De plus, il reste un paramètre important qui est inconnu, c'est le moment d'inertie du rotor rapporté à l'axe de réducteur. Ce terme peut devenir assez grand, car l'inertie propre du rotor rapporté à l'axe de sorte est multipliée par le carré du facteur de réduction, soit 1918,44. Ce terme est important dans toutes les phases transitoires de la commande du moteur qui se présentent de façon permanente dans le recherche de l'équilibre du gyropode.

Il devient nécessaire de se lancer dans la mesure des paramètres du moteur réel utilisé par le gyropode, et pour cela bien préciser le modèle électrique du moteur à courant continu pour bien établir les relations entre les grandeurs mesurables est les paramètres qui caractérisent le fonctionnement du moteur.

### Équations du fonctionnement du moteur, pour la mesure de ses paramètres.

Schéma du moteur modélisé :



$V_e$  et  $I_e$  : tension et courant d'entrée du moteur

$R_b$  et  $L_b$  : résistance ohmique et inductance du moteur

$I_o$  : courant de perte constant,  $G_o$  conductance qui représente les pertes variables

$K_{mv} \omega$  : f.c.e.m développée par la rotation du rotor

$J$  : c'est le terme qui représente le moment d'inertie de la partie tournante du moteur

$K_{mc} I_m$  : couple généré par le moteur sur l'axe de rotation

$C_{ext}$  et  $f_v \omega$  : couple exercé par des éléments extérieurs et  $f_v$  un coefficient de frottement, ils s'opposent au couple moteur.

D'après les éléments représentés sur le modèle du moteur, les équations électriques s'écrivent :

$$(1) \quad I_e = I_o + G_o K_{mv} \omega + I_m$$

$$(2) \quad V_e = R_b I_e + L_b \frac{dI_e}{dt} + K_{mv} \omega$$

et la relation aux propriétés mécaniques :

$$(3) \quad J \frac{d\omega}{dt} + f_v \omega = K_{mc} I_m - C_{ext}$$

En modifiant (3) on obtient 
$$I_m = \frac{J}{K_{mc}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{f_v}{K_{mc}} \omega + \frac{C_{ext}}{K_{mc}}$$

On reporte cette forme de  $I_m$  dans (1)

$$(4) \quad I_e = I_o + G_o K_{mv} \omega + \frac{J}{K_{mc}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{f_v}{K_{mc}} + \frac{C_{ext}}{K_{mc}}$$

Il en découle la relation entre la tension appliquée et la vitesse de rotation en portant (4) dans (2) :

$$V_e = R_b I_o + \omega \left( K_{mv} + \left( G_o K_{mv} + \frac{f_v}{K_{mc}} \right) R_b \right)$$

$$(5) \quad \frac{+d\omega}{dt} \left( \frac{R_b J}{K_{mc}} + L_b \left( G_o K_{mv} + \frac{f_v}{K_{mc}} \right) \right) + \frac{d^2\omega}{dt^2} \left( L_b \frac{J}{K_{mc}} \right) + \frac{R_b}{K_{mc}} C_{ext} + \frac{L_b}{K_{mc}} \frac{dC_{ext}}{dt}$$

*En vue d'évaluer ces différents paramètres du moteur, on utilisera des configurations particulières. La solution générale de cette équation ne sera pas recherchée.*

*Toutes ces configurations utilisent le moteur « à vide », c-à-d sans charge sur l'axe rotor.*

### Évaluation de l'inductance $L_b$ : résonance d'un circuit LC.

Le moteur sans alimentation de tension continue, mais sinusoïdale alternative, ne tourne pas. Il est assimilé à une simple inductance. Les pertes  $I_o$  et  $G_o$  liées à la rotation, sont omises. Le circuit résonant est obtenu en mettant un condensateur en parallèle sur le moteur, tel que le représente la figure.

Les valeurs utilisées sont :  $R_{ext} = 22 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ .

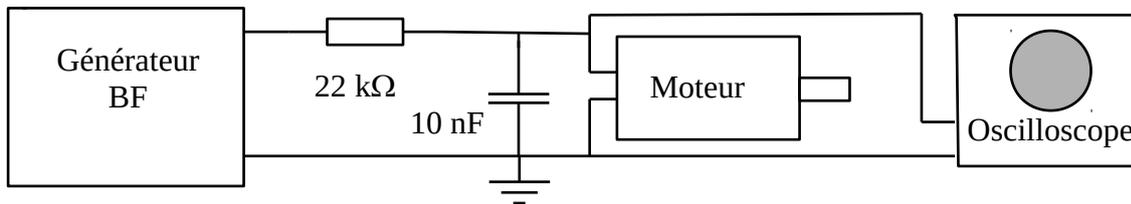
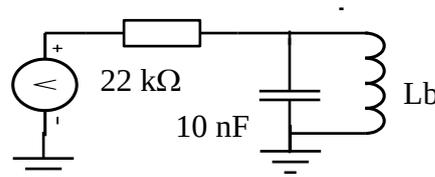


Figure du montage

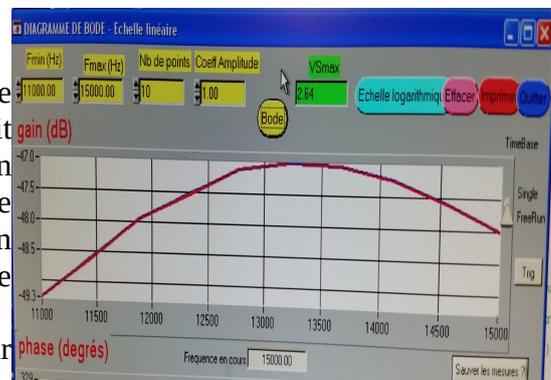


Circuit électrique équivalent

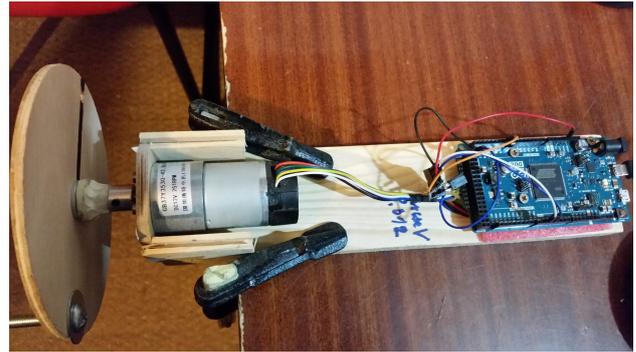
La tension sinusoïdale est d'amplitude constante et de fréquence variable. La tension aux bornes du circuit résonant est visualisée sur l'écran de l'oscilloscope. On observe un maximum d'amplitude pour une fréquence de 13,3 kilohertz, avec une incertitude de 100 hertz. Un relevé automatique sur l'image ci-contre montre ce résultat.

Puisque la fréquence de résonance est donnée par l'expression simplifiée :  $2\pi Fr = \frac{1}{\sqrt{CL_b}}$ , on en déduit :

$$L_b = \frac{1}{4\pi^2 (13300^2) 10,16 \cdot 10^{-9}} = 14 \text{ mH} \quad : \text{ Première mesure } L_b = 14 \text{ mH.}$$



## Évaluation du paramètre $K_{mv}$ .



Ces 2 images permettent de voir le dispositif utilisé pour la mesure.

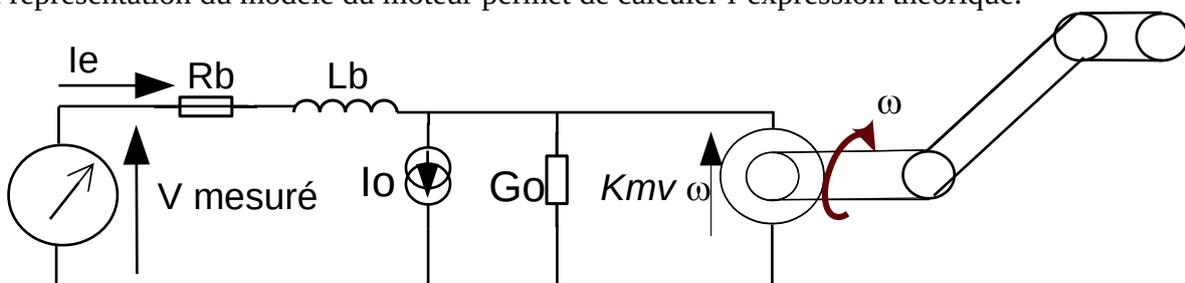
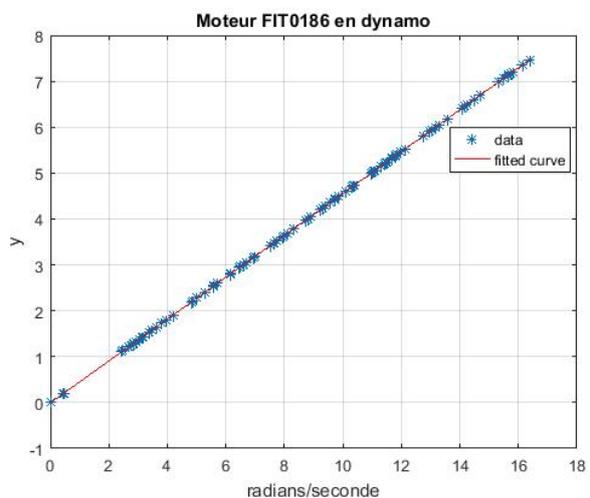
*Le moteur n'est alimenté par aucun générateur, on le fait tourner à la main, à la manivelle, et il se comporte en dynamo.*

Pour mesurer la tension de dynamo pour plusieurs vitesses de rotation et obtenir de nombreux points mesurés, cette tension est numérisée par le convertisseur analogique-digital d'un Arduino Due. Simultanément, les impulsions tachymétriques fournies par le capteur de hall à l'arrière du moteur (le bloc noir) créent des interruptions qui sont comptées pendant une demi seconde. Sachant que le capteur de hall donne 700 impulsions par tours, le module Arduino calcule la vitesse de rotation. L'opérateur commence par une rotation lente, puis accélère progressivement.

Ainsi, à chaque demi-seconde, la liaison UART envoie sur le terminal de l'ordinateur la moyenne des tensions mesurées et la vitesse de rotation. Il suffit de tracer ensuite la droite qui représente  $V_{mesuré} = f(\omega)$ .

Le résultat obtenu est très bon, une régression linéaire donne le résultat :  $V_{mesuré} = 0,4561 \omega - 0,006$ . Le terme constant est dans l'incertitude de mesure, c'est bien une droite passant par l'origine des coordonnées.

La représentation du modèle du moteur permet de calculer l'expression théorique.



La mesure d'entrée est équivalente à un voltmètre d'impédance d'entrée élevée, la valeur du courant  $I_e$  est alors nulle. Ainsi la tension  $K_{mv} \omega$  générée par l'effet dynamo est directement mesurée par le voltmètre, sans chute de tension :  $V_{mesuré} = K_{mv} \omega$

D'après l'équation de la droite  **$K_{mv}$  vaut 0,4561 volt/(rad/sec)**

### Évaluation de la résistance ohmique $R_b$ .

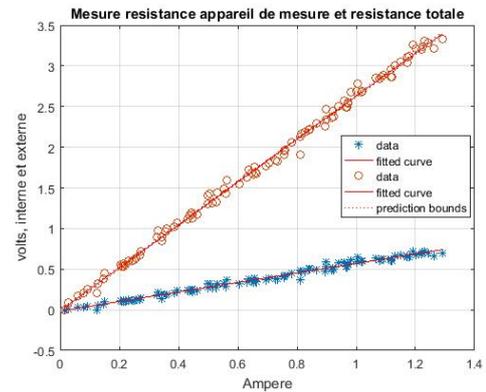
C'est le même dispositif qui est utilisé, en remplaçant le voltmètre par un capteur ampèremétrique. Le relevé du courant ainsi que la vitesse de rotation est transmise de la même manière que précédemment vers le terminal ordinateur. Un troisième relevé est fait simultanément, c'est la tension aux bornes du dispositif ampèremétrique. La présence de longs fils de liaison et d'un ampèremètre témoin dans le circuit présente une résistance de plusieurs dixièmes d'ohm, non négligeables devant la valeur de résistance attendue pour le moteur.

La valeur de la vitesse de rotation de la manivelle permet de calculer pour chaque ligne du relevé la tension du générateur interne de la dynamo puisque  $K_m v$  vient d'être calculé. L'ensemble des valeurs expérimentales, représentées sur la figure ci-contre, se placent bien sur une droite. Une régression linéaire donne sur la droite du bas, tracée pour les tensions aux bornes du dispositif ampèremétrique, une pente de 0,585 V/A, soit une résistance de 0,585  $\Omega$ .

La droite du haut, tracée pour la tension de générateur interne calculée d'après la vitesse de rotation, a une pente de 2,639 V/A. La résistance totale du circuit vaut donc 2,639  $\Omega$ , dont la différence 2,639-0,585=2,044  $\Omega$  est la résistance ohmique du moteur.

Compte tenu des incertitudes, on attribue la valeur  **$R_b$  égale 2  $\Omega$ .**

Cette valeur est un peu plus grande que les 1,7  $\Omega$  trouvés d'après les caractéristiques du constructeur, mais les 0,3  $\Omega$  supplémentaires sont justifiés par la connectique liée à la mise en œuvre du moteur.



### Évaluation du paramètre $K_{mc}$ .

Le dispositif de mesure est représenté sur l'image ci-contre.

Un levier est solidaire de l'axe moteur. Des poids peuvent s'accrocher à l'une des extrémités du levier, à 15 cm de l'axe moteur. Les butées placées en bout du levier limitent le débattement des extrémités 2 cm environ. Il est alors facile de calculer le moment exercé sur l'axe du moteur, il est le produit de 9,81 \* masse \* longueur du levier.

Le terme 9,81 est l'accélération de la pesanteur, et

en exprimant la masse en kg et le bras de levier en mètre, le moment est obtenu en newton.mètre.

L'expérience est conduite de la façon suivante :

- aucune charge est accrochée au levier, et la tension d'alimentation du moteur est très lentement augmentée jusqu'à ce que le levier bascule dans un sens. La valeur du courant nécessaire est notée. Puis l'alimentation est remise à zéro et inversée puis augmentée lentement jusqu'à ce que le levier bascule dans l'autre sens. La valeur de ce courant est à nouveau notée.

- puis une masse de 100 grammes, est accrochée à l'une des extrémités du levier. La tension d'alimentation est augmentée à nouveau jusqu'au basculement, et le courant noté. Puis la tension est diminuée jusqu'à ce que le levier revienne à son point de départ, et la valeur du courant est notée.

- la manipulation précédente est répétée pour 3 autres masses : 200, 300, et 400 grammes.

Idéalement, le courant nécessaire pour faire monter la masse serait seulement légèrement supérieur à celui pour lequel elle redescendrait. En effet la relation du couple moteur est idéalement simple :

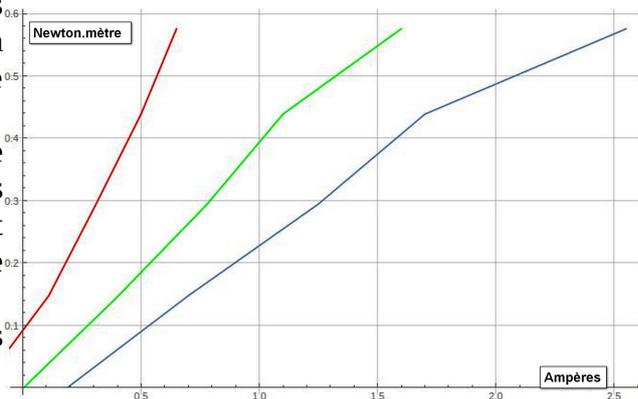
Couple Moteur =  $K_{mc} I_m$ .



Cependant les points expérimentaux montre une grande hystérésis dans ces relevés expérimentaux. On peut les attribuer probablement au frottements solides, et surtout à la variation du couple moteur en fonction de la position relative des pôles du rotor et des aimants du stator. Le rotor du moteur s'arrête dans une position ou ce couple est maximum, et pour qu'il quitte ce maximum, en présence d'un couple mécanique, il apparaît une hystérésis suivant le cas ou l'on veut démarrer un rotation dans le sens favorable ou contraire au couple mécanique.

Les points expérimentaux sont portés sur la figure ci-contre. La courbe bleue porte les points relevés lorsque la masse est levée en bout de levier, et celle en rouge, les points relevés lorsqu'elle descend.

La courbe en vert est une moyenne des 2 autres courbes.



Une régression linéaire effectuée sur la courbe bleue donne une pente de 0,248 soit Couple Moteur =  $K_{mc} I_e$  avec  $K_{mc} = 0,248 \text{ N.m/A}$ .

La courbe rouge a une pente de 0,695 et la courbe verte 0,369.

On peut faire les remarques suivantes : la valeur de  $K_{mc} = 0,248$  obtenue pour que le levier quitte son blocage est assez proche du couple de blocage  $0,265 \text{ N.m/A}$  tiré des caractéristiques du constructeur, et la valeur moyenne obtenue sur la courbe verte n'est pas si loin de la valeur du moteur idéal ou  $K_{mc} = K_{mv}$ . La mesure donne  $K_{mv} = 0,456 \text{ V/(rad/sec)}$  et la pente moyenne  $0,369 \text{ N.m/A}$ . Mais ce dernier point n'a peut-être aucun intérêt...

Il est notable que cette mesure est la plus incertaine de l'ensemble de ce projet.

Ces moteurs sont utilisés dans ce projet pour stabiliser verticalement le gyropode, et devront fréquemment répondre à des sollicitations électriques autour de leur point d'arrêt ce qui nous incite à choisir comme point de départ :  **$K_{mc} = 0,25 \text{ N.m/A}$**

### Évaluation du courant $I_0$ et de l'amortissement.

Le terme  $(Go K_{mv} + \frac{fv}{K_{mc}})$  que nous appelons amortissement est liés au pertes du moteur.

Il apparaît fréquemment, par exemple, dans la relation donnant la rotation moteur pour une tension appliquée. Cette relation a été calculée précédemment (équation 5) :

$$V_e = R_b I_0 + \omega \left( K_{mv} + \left( Go K_{mv} + \frac{fv}{K_{mc}} \right) R_b \right) + \frac{d\omega}{dt} \left( \frac{R_b J}{K_{mc}} + L_b \left( Go K_{mv} + \frac{fv}{K_{mc}} \right) \right) + \frac{d^2\omega}{dt^2} \left( L_b \frac{J}{K_{mc}} \right) + \frac{R_b}{K_{mc}} C_{ext} + \frac{L_b}{K_{mc}} \frac{dC_{ext}}{dt}$$

Ils nous apparaît utile d'en connaître sa valeur.

Pour réaliser cette mesure, c'est le même dispositif que celui qui a déjà été utilisé, et rappelé sur l'image. A la différence près que le disque avec la manivelle est enlevé, et le moteur est alimenté par une tension continue, qui augmente lentement.



Cette fois, le terminal de l'ordinateur enregistre simultanément, 2 fois par seconde, la tension d'alimentation du moteur, le courant courant d'alimentation et la vitesse de rotation.

Ce type de mesure peut être assimilée à une suite d'états continus, stationnaires par rapport au temps. Dans ce cas les dérivées par rapport au temps s'annulent et les équations précédentes notées (1) et (3) se réduisent à :

(3 stationnaire) :  $I_m = \frac{fv}{Kmc} \omega$  et (1 stationnaire) :  $I_e = I_o + (Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}) \omega$  ainsi que

l'expression rappelée en début de ce paragraphe :  $V_e = R_b I_o + \omega (Kmv + (Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}) R_b)$  .

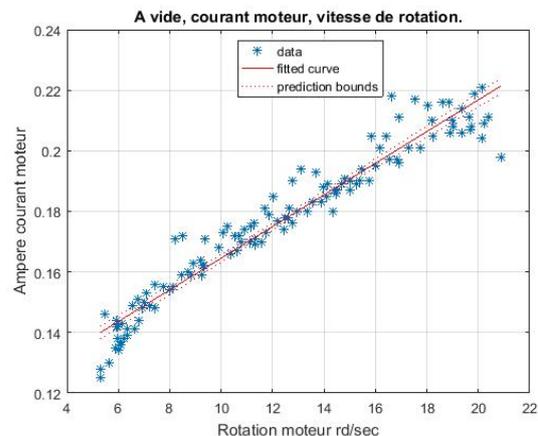
En particulier le tracé de la forme (1 stationnaire) du courant moteur en fonction de la vitesse de rotation est une droite dont la pente est le terme d'amortissement recherché, et l'ordonnée à l'origine est la valeur du courant  $I_o$ .

Le relevé expérimental est plus bruité que les précédents effectués sans alimentation du moteur, mais l'ensemble des relevés permet de bien définir une droite dont la pente à un bon indice de confiance : on en déduit  $I_e = 5,2 \times 10^{-3} \omega + 0,11$  .

Il faut constater que le courant  $I_o$  n'atteint pas les 0,35 A prévu. D'ailleurs la mesure directe à l'ampèremètre du courant moteur n'est que de 0,25 A sous 12 volts . La valeur déduite de la droite est encore plus faible : 0,11 A.

Le terme d'amortissement obtenu est :

**Amortissement =  $5,2 \times 10^{-3}$ .**



**Évaluation du moment d'inertie du rotor  
vu sur l'axe extérieur, en sortie du réducteur.**

Le moment d'inertie intervient dans les phases de rotation variable du moteur. Pour l'évaluer, une méthode possible est le tracé d'un diagramme de Bode de la vitesse de rotation en fonction d'une tension de modulation modulée sinusoïdalement.

Pour faire ceci, le moteur est alimenté par un amplificateur qui superpose une tension continue et une tension sinusoïdale. En supposant que le moteur a une réponse linéaire, la composante sinusoïdale de la rotation à la tension d'alimentation  $V_e = V_o + v_e \cos(\omega_e t)$  sera de la forme : . La notation  $\omega_o$  est la vitesse de rotation en régime statique pour la tension continue  $V_o$ , et  $\omega_r$  est l'amplitude complexe de la variation sinusoïdale de la vitesse de rotation à la fréquence  $\frac{\omega_e}{2\pi}$  .

**Expression théorique de ce régime sinusoïdal.**

Elle découle de l'équation (5) , en éliminant  $I_o$  qui est un terme constant, en éliminant  $C_{ext}$  parce que la mesure est faite à vide, donc sans couple externe et en remplaçant  $\frac{d}{dt} \rightarrow j \omega_e$  et

$$V_e = \omega_r (Kmv + (Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}) R_b)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow -\omega_e^2 . \text{ L'équation (5) devient : } +j \omega_r \omega_e (\frac{R_b J}{Kmc} + Lb (Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}))$$

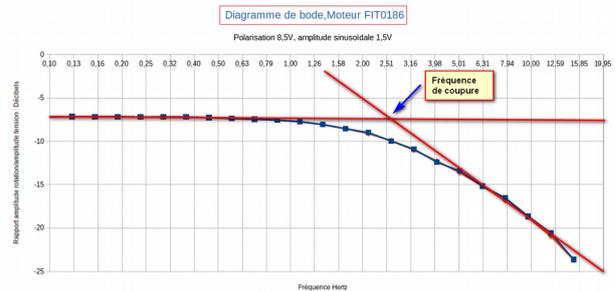
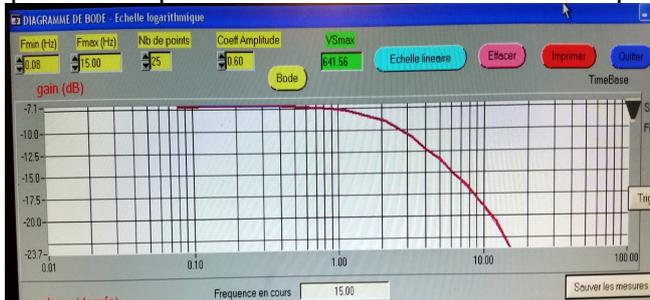
$$- \omega_r \omega_e^2 (Lb \frac{J}{Kmc})$$

Une approximation de départ consiste à négliger l'influence de l'inductance devant l'inertie  $J$  de l'ensemble rotor, quitte à vérifier a posteriori la validité du résultat dans le domaine de la mesure.

L'expression précédente se réduit alors à  $V_e = \omega_r (Kmv + (Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}) R_b + j \omega_e (\frac{R_b J}{Kmc}))$  .

La représentation de Bode de la fonction  $\left(\frac{\omega_r}{Ve}\right)$  donne une fréquence de coupure à 3 db  $\omega_{ec}$  telle que :  $Kmv + \left(Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}\right) Rb = \omega_{ec} \left(\frac{Rb J}{Kmc}\right)$ . Le moment d'inertie s'en déduit, mesuré dans l'expérience suivante.

Un dispositif qui utilise un oscilloscope numérique, un ordinateur utilisant un programme développé sous LabWindows CVI qui pilote un synthétiseur numérique de signaux sinusoïdaux et qui fait l'acquisition des courbes de l'oscilloscope a donné le diagramme de l'image ci-dessous.



La fréquence de coupure déduite est voisine de 2,5 Hertz soit .

En prenant les valeurs numériques déjà évaluées :  $J = \frac{0,25}{2 \times 15,7} (0,456 + 0,052 \times 2) = 3,7 \times 10^{-3}$  .

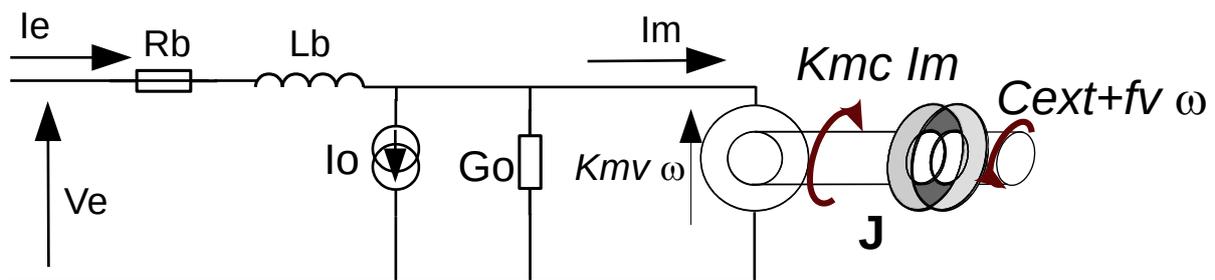
Il faut noter que la valeur numérique de J est associée à la valeur numérique et donc à son imprécision. **Moment d'inertie du moteur :  $3,7 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .**

Mais aussi que **l'expression qui intervient dans l'équation du fonctionnement** du moteur est le

rapport :  $\frac{J}{Kmc} = \left(\frac{1}{Rb \omega_{ec}}\right) \left(Kmv + \left(Go Kmv + \frac{fv}{Kmc}\right) Rb\right)$

**Il vaut 0,0148, il est plus précis**, il ne dépend que de mesures de faibles incertitude.

**En résumé, les valeurs numériques des paramètres du moteur FIT086 retenues sont :**



**$Rb = 2 \Omega$ ,  $Lb = 14 \text{ mH}$ ,  $Kmv = 0456 \text{ V}/(\text{rad}/\text{sec})$ ,  $Kmc = 0,25 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{A}$ , amortissement = 0,0052,  $J = 3,7 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  .**

**$Io = 0,11 \text{ A}$  (ne sera pas utilisé).**

## 2. Comportement mécanique du corps du robot

### Mesures des caractéristiques mécaniques.

#### Mesure des masses.

En regardant le gyropode sur le côté on distingue deux parties mobiles l'une par rapport à l'autre autour de l'axe moteur. La partie supérieure contient presque tous les éléments du robot, solidaire de la partie externe des moteurs, (les stators), qui s'inscrit plus ou moins dans un parallélépipède : on le nomme corps du robot. La partie inférieure formée des 2 roues est solidaire de l'axe moteur : on les nomme simplement roues. L'ensemble des 2 roues, des 2 axes moteurs et des rotors sont supposés fonctionner de façon identique, on les considère comme une seule entité.

Les 2 parties du gyropode interagissent par l'intermédiaire de l'axe moteur. Les roues interagissent avec l'extérieur par les forces de réaction du sol, où elles peuvent se déplacer sans glissement.

La mesure des masses se fait simplement sur une balance de cuisine .

**Masse du corps du robot (complet sans les roues) : 1,0 kg.**

**Masse d'une seule roue de diamètre 61 mm : 30 grammes.**

**Masse d'une seule roue de diamètre 88 mm : 52 grammes.**

#### Théorèmes de la mécanique.

Les mouvements et l'équilibre du gyropode sont régis par l'application de moments et de forces sur l'axe moteur, des forces de réaction du sol au contact des roues et de l'attraction de la pesanteur sur sa masse.

Les équations des mouvements se trouvent grandement simplifiées si l'on considère l'attraction de la pesanteur comme une seule force verticale appliquée au centre de gravité et l'action du couple moteur en fonction du moment d'inertie du corps par rapport l'axe moteur.

Les 2 théorèmes suivant seront très utiles pour les mesures sur le gyropode et le calcul des équations du mouvement.

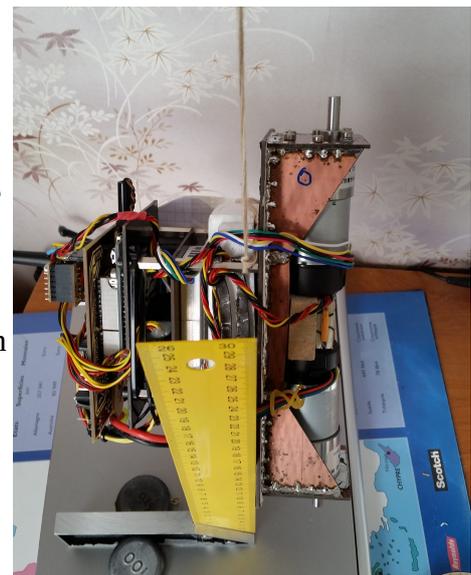
**Premier théorème :** Si le moment d'inertie  $J_g$  d'un corps est connu pour une rotation autour d'un axe passant par son centre de masse, le moment d'inertie autour d'un axe parallèle passant par un axe 0, dont la distance est  $OG$  est  $J_0 = M * OG^2 + J_g$  ,  $M$  est la masse du corps.

**Second théorème :** L'énergie cinétique totale d'un corps en translation et rotation est la somme de l'énergie cinétique de translation calculée au centre de masse, et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse.

#### Mesure de la position du centre de masse du corps du gyropode.

Plus précisément, la mesure intéressante est celle de la distance du centre de masse du corps du robot à l'axe de rotation des roues. C'est à cet endroit qu'interviennent les forces d'action sur le corps du robot, autres que celle de la pesanteur.

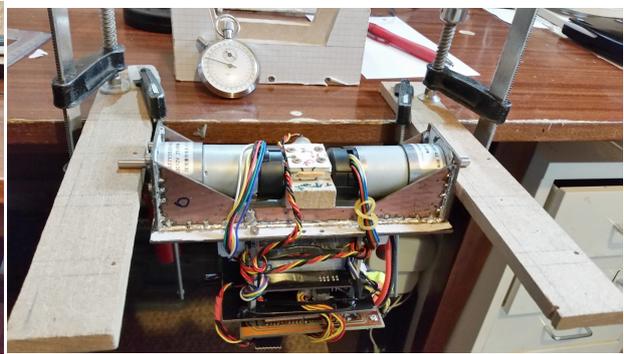
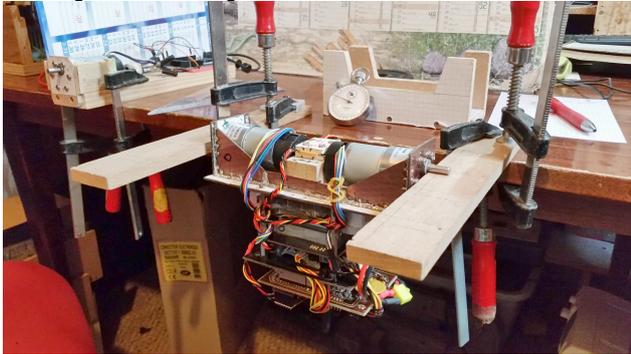
Pour ce faire, il suffit d'accrocher un montant du gyropode à un fil souple et de trouver le point d'accrochage tel que le plan de base du corps soit vertical. Dans ce cas le point d'accrochage du fil qui indique la direction du centre de masse est dans un plan parallèle au plan de base. Il suffit alors de mesure la



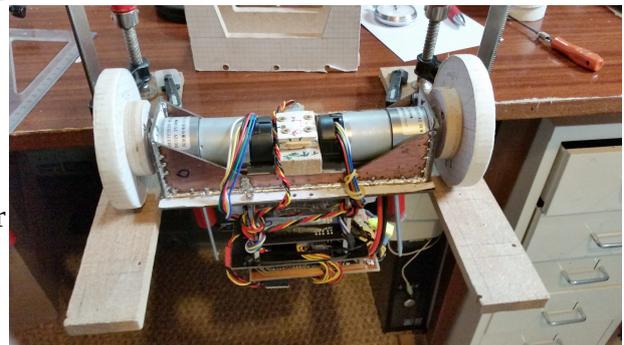
distance « horizontale » du point d'accrochage et de l'axe d'un moteur : cette distance **axe des roues au centre de masse du corps compris entre 37 et 38 mm.**

**Dipositif de mesure du moment d'inertie du corps du gyropode.**

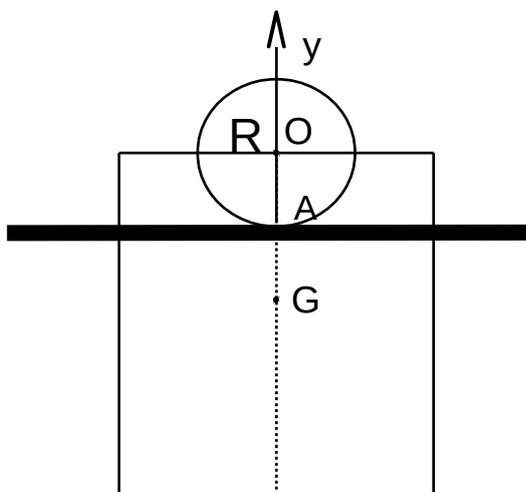
Cette mesure va se faire en mesurant la période de balancement du gyropode placé entre deux supports horizontaux, autour de sa position stable. La mesure est effectuée dans deux configurations : sans les roues puis avec les roues. Les images suivantes vont éviter une longue description du dispositif.



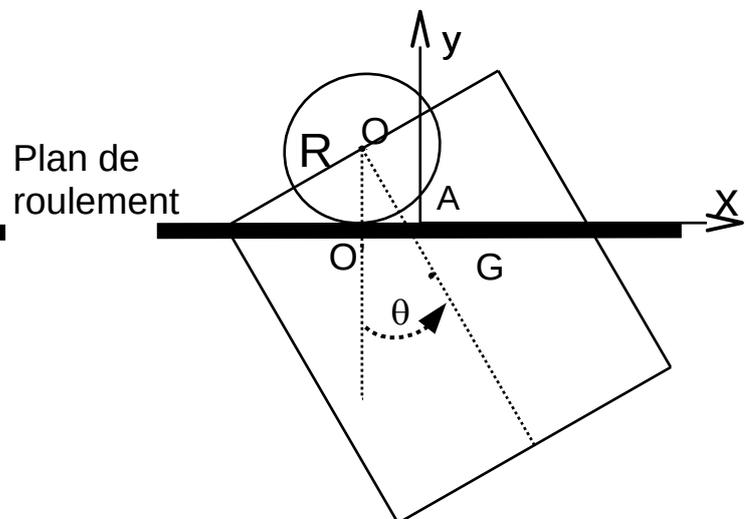
Le gyropode, écarté de sa position d'équilibre puis laissé libre effectue des balancements amortis. L'axe cylindrique des moteurs ou les roues roulent alors sans glissement sur les rails support, ce qui engendre un déplacement associé à la rotation autour de l'axe lors de ce balancement.



Pour interpréter les résultats des mesures on représente le dispositif dans la direction de l'axe de balancement sur les figures suivantes.



Position équilibre stable



Inclinaison  $\theta$  et déplacement AO'

Le corps du gyropode est représenté par un rectangle. Lorsqu'il est incliné dans une position hors d'équilibre stable, son inclinaison s'accompagne d'une rotation de la roue correspondant au même angle d'inclinaison  $\theta$ , (la roue est sur l'axe moteur, mais en ces circonstances, le moteur reste

bloqué). La roue repose sur le plan de roulement et se déplace sans glissement. Son point d'appui se déplace alors de la longueur  $AO' = R \theta$ , où  $R$  est le rayon de la roue.

Les paramètres du balancement, en particulier sa période dépendant du moment d'inertie du corps de gyropode seront calculés à partir de la méthode de Lagrange. Pour appliquer cette méthode il faut en premier lieu écrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'ensemble au cours du balancement. Il faut additionner l'énergie cinétique des roues et l'énergie cinétique du corps du gyropode. Il faut aussi l'expression de la variation de l'énergie potentielle du corps du gyropode, l'énergie potentielle des roues est constante car on admet que le plan de roulement est horizontal.

### Énergie cinétique des roues.

L'énergie cinétique des roues est la somme des énergie cinétique de translation calculée au centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse. La roue a une symétrie de révolution qui implique que le centre de masse soit au centre de la roue. Comme on le voit sur les dessins précédents, le déplacement du centre de masse est uniquement horizontal, composante suivant  $\vec{Ax} = -R \times \theta(t)$ , composant suivant  $\vec{Ay} = 0$ . En appelant  $M_{roue}$  la masse des roues, leur énergie cinétique de translation est  $1/2 \times M_{roue} \times R^2 \times \theta'(t)^2$ . L'angle de rotation des roues est  $\theta(t)$ . En appelant  $J_{roue}$  le moment d'inertie des roues, leur énergie cinétique de rotation est  $1/2 \times J_{roue} \times \theta'(t)^2$ . Soit une énergie cinétique totale des roues :

$$E_{cinroue} = \frac{1}{2} J_{roue} \theta'(t)^2 + \frac{1}{2} M_{roue} R^2 \theta'(t)^2$$

### Énergie cinétique du corps du gyropode.

La rotation du gyropode, ainsi que l'indique le dessin précédent, est aussi d'un angle  $\theta(t)$ . En appelant  $J_{corps}$  le moment d'inertie du corps du robot, calculé au centre de masse, l'énergie cinétique de rotation est  $1/2 \times J_{corps} \times \theta'(t)^2$ .

La détermination de l'énergie cinétique de translation demande de calculer la vitesse de déplacement du centre de masse. On peut écrire les composantes du point  $G$  en fonction de la rotation  $\theta(t)$  qui entraîne le déplacement du point  $O$  dans la direction  $\vec{Ax}$  de la quantité  $-R \times \theta(t)$ .

Composante de  $\vec{AG}$  dans la direction (x) :  $\vec{AG}_x = -R \times \theta(t) + OG \times \sin(\theta(t))$

Composante de  $\vec{AG}$  dans la direction (y) :  $\vec{AG}_y = R - OG \times \cos(\theta(t))$

On en déduit le carré de la vitesse de déplacement de  $G$  :  $V_G^2 = \left(\frac{dAG_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dAG_y}{dt}\right)^2$  soit en

fonction de la rotation  $\theta(t)$  :  $V_G^2 = \theta'(t)^2 (OG^2 - 2 \times OG \times R \times \cos(\theta)(t) + R^2)$ .

En appelant  $M_{corps}$  la masse du corps du robot, l'énergie cinétique de translation calculée au centre de masse est  $\frac{1}{2} \times M_{corps} \times \theta'(t)^2 (OG^2 - 2 \times OG \times R \times \cos(\theta)(t) + R^2)$ .

L'énergie cinétique totale est la somme des expressions :

$$E_{cincorps} = \frac{1}{2} \theta'(t)^2 (J_{corps} + M_{corps} (OG^2 - 2 OG R \cos(\theta(t)) + R^2))$$

### Énergie potentielle du corps du gyropode.

Elle provient du travail de la pesanteur et dépend directement de la hauteur du centre de masse du corps du gyropode, c'est-à-dire de  $\cos \theta(t)$ . En choisissant arbitrairement la valeur zéro pour l'énergie potentielle quand  $\cos \theta(t) = 0$  en notant :  $g$ , l'accélération de la pesanteur, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_{pot} = -g M_{corps} OG \cos(\theta(t))$$

## Lagrangien du gyropode dans son mouvement pendulaire.

Le lagrangien du système est égal à son énergie cinétique totale moins son énergie potentielle . Elle s'exprime par la relation :  $Lag = E_{cinroue} + E_{cincorps} - E_{pot}$

$$Lag = \frac{1}{2} (2 g M_{corps} OG \cos(\theta(t)) + \theta'(t)^2 (J_{corps} + J_{roue} + R^2 (M_{corps} + M_{roue}) + M_{corps} OG^2 - 2 M_{corps} OG R \cos(\theta(t))))$$

Il n'apparaît dans l'expression qu'une seule variable  $\theta(t)$  ainsi que sa dérivée par rapport au temps, il n'y a donc qu'une seule équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta Lag}{\delta \theta'} \right) - \left( \frac{\delta Lag}{\delta \theta} \right) = \text{Couple appliqué}$$

Dans le mouvement de balancement libre on suppose que le couple appliqué se réduit à un couple de frottement visqueux :  $-fc \theta'(t)$  , où  $fc$  est un coefficient de frottement.

Les différentes dérivations donnent :

$$\left( \frac{\delta Lag}{\delta \theta} \right) = M_{corps} OG \sin(\theta(t)) (R \theta'(t)^2 - g)$$

$$\left( \frac{\delta Lag}{\delta \theta'} \right) = \theta'(t) (J_{corps} + J_{roue} + R^2 (M_{corps} + M_{roue}) + M_{corps} OG^2 - 2 M_{corps} OG R \cos(\theta(t)))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta Lag}{\delta \theta'} \right) = \theta''(t) (J_{corps} + J_{roue} + R^2 (M_{corps} + M_{roue}) + M_{corps} OG^2 - 2 M_{corps} OG R \cos(\theta(t))) + 2 M_{corps} OG R \theta'(t)^2 \sin(\theta(t))$$

On obtient ainsi l'équation différentielle du mouvement.

$$fc \theta'(t) + g M_{corps} OG \sin(\theta(t)) + \theta''(t) (J_{corps} + J_{roue} + R^2 (M_{corps} + M_{roue}) + M_{corps} OG^2 - 2 M_{corps} OG R \cos(\theta(t))) + M_{corps} OG R \theta'(t)^2 \sin(\theta(t)) = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre, non linéaire. La recherche de solutions simples se fait pour de petits mouvements, afin de pouvoir linéariser l'équation. En se limitant au termes de premier ordre, on approxime  $\sin(\theta) \rightarrow \theta$ ,  $\cos(\theta) \rightarrow 1$ ,  $\theta'(t)^2$  et  $\theta'(t)^2 \sin(\theta(t)) \rightarrow 0$  car ce sont des termes d'ordre deux et trois.

Cette équation ainsi linéarisée devient :

$$fc \theta'(t) + g M_{corps} OG \theta(t) + \theta''(t) (J_{corps} + J_{roue} + M_{corps} (OG - R)^2 + M_{roue} R^2) = 0$$

C'est une équation qu'il est facile de mettre sous la forme générale :

$$(\theta)''(t) + 2\omega_0 z \theta'(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

en posant :

$$\omega_0^2 = \frac{g M_{corps} OG}{J_{corps} + J_{roue} + M_{corps} (OG - R)^2 + M_{roue} R^2}$$

et

$$2 \omega_0 z = \frac{fc}{J_{corps} + J_{roue} + M_{corps} (OG - R)^2 + M_{roue} R^2}$$

Le résultat de cette équation différentielle est une sinusoïde amortie, lorsque les conditions initiales corresponde à une situation hors de l'équilibre :

$$\theta(t) = \theta_0 \exp(-z \omega_0 t) \sin(\omega t + \phi) \quad \text{où la pulsation est telle que } \omega^2 = \omega_0^2 (1 - z^2)$$

### Retour aux mesures expérimentales :

#### calcul du moment d'inerties du corps du gyropode et du coefficient d'amortissement fc.

Le gyropode est légèrement écarté de sa position d'équilibre et son temps de balancement est mesuré au chronomètre.

Trois configuration de mesures ont été utilisées :

- balancement sur l'axe moteur de diamètre 6 millimètres. Cette configuration est représenté sur le 2 premières images du dispositif de mesure.
- balancement avec une roue de diamètre 61 millimètres fixée sur l'axe moteur, comme sur la 3ème image du dispositif de mesure.
- balancement avec une roue de 88 millimètres de diamètre fixée sur l'axe moteur.

#### 1ère configuration

Le balancement est faiblement amorti : avant l'arrêt du balancement on peut voir environ 80

périodes. On vient d'écrire que l'amortissement est exprimé par  $\exp(-z \omega_0 t) = \exp(-z \frac{2\pi t}{T_0})$

qui ne vaut plus que 5 % quand  $z \frac{2\pi t}{T_0} = 3$  , c'est-à-dire qu'il correspond à presque l'arrêt du

balancement. En prenant ce temps égal aux 80 périodes constatées  $z = \frac{3}{2\pi \cdot 80} = 0,006$  environ.

Dans ce cas, dans l'expression de la pulsation , le facteur correctif  $(1 - z^2)$  reste pratiquement égal à 1, et la pulsation mesurée est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  .

Le chronométrage de 50 périodes s'est effectuée en 28,5 secondes.

Soit la période  $T_0 = 0,57$  sec,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 11,02$  rd/sec et  $\omega_0^2 = 121,4$  .

Le but de la mesure est d'obtenir la valeur numérique du moment d'inertie  $J_{corps}$  du corps du gyropode autour de l'axe passant par sont centre de masse G.

A partir de la solution de l'équation différentiel donnant  $\omega_0^2$  on tire la relation :

$$J_{corps} = \frac{g M_{corps} OG}{\omega_0^2} - (J_{roue} + M_{corps} (OG - R)^2 + M_{roue} R^2)$$

Dans cette 1ère configuration le balancement se fait autour de l'axe moteur, donc  $R = 3$  mm,  $J_{roue}$  tout comme  $M_{roue}$  sont nuls, puisqu'il n'y a pas de roue. La masse du corps a déjà été indiquée  $M_{corps} = 1,0$  kg, et l'accélération de la pesanteur est  $9,81$  m/sec<sup>2</sup>.

D'après nos mesures  $OG = 37,5$  mm et

$$J_{corps} = \frac{9,81 \cdot 1,0 \cdot 0,0375}{121,4} - 1,0 (0,0375 - 0,003)^2 = 1,84 \times 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

#### Valeur du moment d'inertie autour de l'axe passant par le centre de masse du corps du gyropode : $1,84 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ .

#### 2ème configuration

Les roues de 61mm de diamètre sont montées sur les axes moteurs.

Les oscillations de balancement s'amortissent bien plus rapidement, on peut en observer environ une douzaine, et le chronométrage de 10 périodes indique 4,7 secondes. La période d'oscillation est plus courte dans cette configuration  $T = 0,47$  seconde.

Si on suppose dans un premier temps que l'effet d'amortissement est négligeable sur la période de

balancement, pour calculer le coefficient z par la formule  $z \frac{2\pi t}{T_0} = 3$  , on prend  $\frac{t}{T_0} = 12$  d'où z

est déduit :  $z = 0,04$  environ. Le facteur correctif sur le carré de la pulsation est  $(1 - z^2) = 0,9984$ . Il est suffisamment voisin de 1 pour n'avoir pas encore à effectuer la correction. La masse des 2 roues est de 0,060 kg. Ce sont des disques presque homogène : une bonne approximation du moment d'inertie est :

$$J_{roue} = \frac{1}{2} M_{roue} R^2 = \frac{1}{2} 0,060 0,0305^2 = 2,79 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

En reprenant l'expression précédente de la pulsation, avec la valeur de  $J_{corps} = 1,84 \times 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$  calculée pour la première configuration :

$$\omega_0^2 = \frac{g M_{corps} OG}{J_{corps} + J_{roue} + M_{corps} (OG - R)^2 + M_{roue} R^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{9,81 \cdot 1,0 \cdot 0,0375}{1,84 \cdot 10^{-3} + 2,79 \cdot 10^{-5} + 1,0 (0,0375 - 0,0305)^2 + 0,060 0,0305^2} = 186,48$$

On en déduit une valeur  $\omega_0 = 13,65 \text{ rd/sec}$  et une période de balancement de 0,46 seconde. Cette valeur est tout à fait compatible avec la mesure de 0,47 seconde aux incertitudes de mesure près.

D'après ces valeurs numériques il est aussi intéressant de calculer le coefficient de frottement visqueux car il apparaîtra à nouveau lorsque les équations d'état du gyropode « debout » sur ses roues seront établies. On estimera alors que la valeur numérique de ce coefficient de frottement lors des ses inclinaisons aura la même valeur que celle mesurée ici.

En combinant les équations donnant  $\omega_0^2$  et  $2 \omega_0 z$  on obtient l'expression

$$fc = 2z \frac{g M_{corps} OG}{\omega_0} \text{ et dans cette configuration}$$

$$fc = 2 \times 0,04 \frac{9,81 \times 1,0 \times 0,0375}{13,65} = 2,16 \cdot 10^{-3} .$$

### 3ème configuration

Les roues de 88mm de diamètre sont montées sur les axes moteurs.

Les oscillations de balancement s'amortissent rapidement, on peut en observer environ 7, et le chronométrage de 5 périodes indique 2,6 secondes. La période d'oscillation dans cette configuration vaut  $T = 0,52$  seconde. Le temps de mesure est bref ce qui rend l'incertitude de mesure proche de 10 %.

Pour l'application des formules  $z \frac{2\pi t}{T_0} = 3$ , on prend  $\frac{t}{T_0} = 6$  d'où  $z = 0,08$ .

Les roues de 88 mm de diamètre sont formées de 2 disques accolés : un plus petit de 50 mm de diamètre et de masse 12,5 g et un plus grand de diamètre 88 mm et de masse 39,5 g. Soit une masse pour chaque roue 52 g. Le moment d'inertie de chaque roue se calcule et écrivant la somme des moments de chaque disque qui la compose, et pour les 2 roues :

$$J_{roue} = 2 \times \left( \frac{1}{2} 0,0125 0,025^2 + \frac{1}{2} 0,0395 0,044^2 \right) = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Et on compare la mesure de la période du balancement en appliquant à nouveau la formule :

$$\omega_0^2 = \frac{g M_{corps} OG}{J_{corps} + J_{roue} + M_{corps} (OG - R)^2 + M_{roue} R^2} \text{ et numériquement}$$

$$\omega_0^2 = \frac{9,81 \cdot 1,0 \cdot 0,0375}{1,84 \cdot 10^{-3} + 8,4 \cdot 10^{-5} + 1,0 (0,0375 - 0,044)^2 + 0,104 0,044^2} = 169,7$$

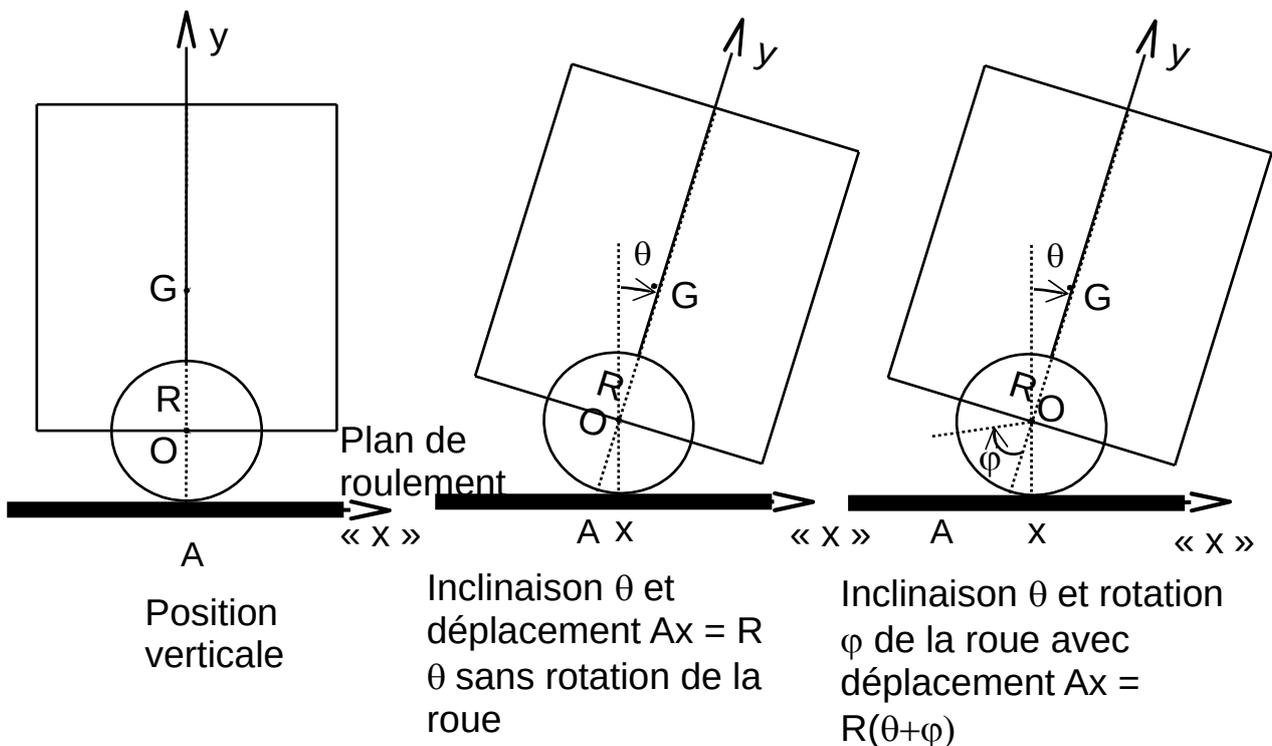
On en déduit une valeur  $\omega_0 = 13,02 \text{ rd/sec}$  et une période de balancement de 0,48 seconde. Le facteur correctif du à l'amortissement est négligeable devant l'incertitude de la mesure, qui est de l'ordre de 0,05 seconde. La valeur mesurée et la valeur calculée d'après les évaluations de la première configure sont correspondantes dans la limite des incertitudes.

Comme dans le cas de la 2ème configuration la valeur numérique du coefficient de frottement visqueux est évaluée par la formule :  $f_c = 2z \frac{g M_{\text{corps}} OG}{\omega_0}$  qui donne :

$$f_c = 2 \times 0,08 \frac{9,81 \times 1,0 \times 0,0375}{13,02} = 4,52 \cdot 10^{-3}$$

### 3. Recherche de la matrice de représentation d'état du gyropode en position « DEBOUT ».

On représente le dispositif dans la direction de l'axe de balancement sur les figures suivantes. Le corps du gyropode est représenté par un rectangle.



Lorsqu'il se voit incliné dans une position hors de la verticale son inclinaison s'accompagne d'une rotation de la roue correspondant au même angle d'inclinaison  $\theta$ , (la roue est sur l'axe moteur, mais en ces circonstances, le moteur reste bloqué). La roue repose sur le plan de roulement et se déplace sans glissement. Son point d'appui se déplace alors de la longueur  $Ax = R\theta$ , où  $R$  est le rayon de la roue. Quand à l'inclinaison s'ajoute une rotation de la roue d'un angle  $\varphi$  il s'ajoute un déplacement supplémentaire  $R\varphi$ . Le déplacement de l'abscisse de l'axe moteur, qui est aussi l'axe de la roue est donné par  $Ax = R(\theta + \varphi)$ . Il se présente dans cette expression 3 grandeurs qui sont :  $Ax$  le déplacement horizontal de l'axe moteur,  $\theta$  l'inclinaison du gyropode et  $\varphi$  l'angle de rotation du moteur. En admettant que la rotation de la roue se fait sans glissement sur le plan de roulement, ces 3 grandeurs sont bien reliées par la relation  $Ax = R(\theta + \varphi)$ . Ainsi il n'y a que 2 grandeurs indépendantes, qui interviendront dans la représentation d'état du dispositif, dans la recherche de stabilité de la position verticale « debout ».

**Attention : Les sens positifs des angles sont tels que le déplacement engendré le long de l'axe  $Ax$  soit aussi positif.**

La relation peut être vectorielle :  $\vec{Ax} = R(\theta + \varphi)\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de l'axe  $x$ .

## Forces et moments utiles pour décrire le comportement du gyropode.

### Remarque.

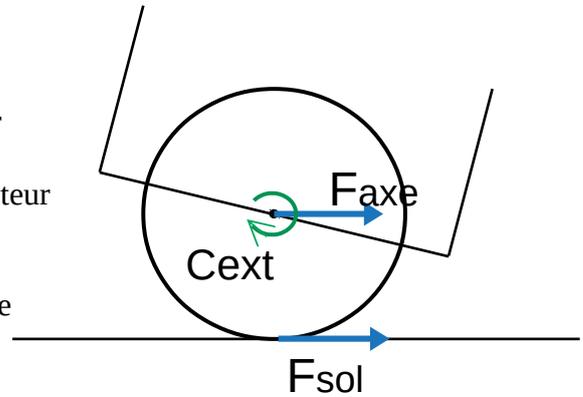
On suppose que le déplacement du gyropode se fait uniquement sur une surface horizontale. Au niveau de l'axe de rotation du moteur et du point de contact des roues les actions et réactions des composantes verticales de forces s'annulent car il n'y a pas de déplacement dans ce sens.

En conséquence on n'écrira aucune équation dans cette direction verticale.

### Les forces horizontales à considérer.

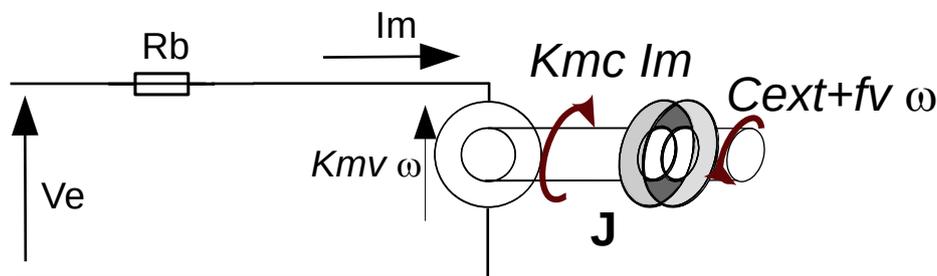
L'élément à stabiliser est le corps du robot lié au stator du moteur. Sa position est entièrement caractérisée par la connaissance de 2 grandeurs : l'abscisse  $x$  de l'axe du moteur qui est son axe de basculement et la grandeur  $\theta$  de ce basculement.

L'action sur le corps du robot se fait par l'intermédiaire de l'axe de la roue solidaire du rotor du moteur. La présence d'une alimentation électrique (accumulateur LiPo de 12 volts), dont l'action est contrôlée par un variateur permet d'ajuster, le couple extérieur exercé sur l'axe de roue par le rotor, qui par le principe d'action et réaction est égal et opposé au couple exercé sur le corps du gyropode solidaire du stator. La présence de ce couple extérieur sur l'axe de la roue induit une force de réaction du sol  $F_{sol}$ , tangente à la roue. Son action se répercute horizontalement sur l'axe du moteur éventuellement diminuée de la composante de la force contribuant à l'accélération du déplacement de la roue. La formulation des équations de la mécanique sous la forme d'**équations de Lagrange** va lier le comportement du corps du gyropode sous l'action du couple du moteur  $C_{ext}$ , de la force horizontale  $F_{axe}$  sur l'axe de rotation et de l'attraction de la pesanteur.



Le couple  $C_{ext}$  sera établi d'après les connaissances des paramètres moteurs, de la tension fournie par le variateur, de sa vitesse de rotation. La force  $F_{axe}$  sera déduite de  $C_{ext}$ , du rayon  $R$  de la roue et de son inertie.

### Action du moteur.



La modélisation complète du moteur a été présentée pour l'étude et le relevé de ses paramètres. La modélisation retenue ici et présentée sur cette figure est simplifiée. La représentation de l'inductance  $L_b$  a disparue.

Son effet a été jugé négligeable devant l'inertie mécanique du rotor ainsi qu'on pourrait le constater sur un diagramme de Bode tracé en tenant compte ou en ne tenant pas compte de l'inductance, du moins aux fréquences basses correspondant au temps de réaction du gyropode.

Le courant  $I_0$  est aussi supprimé car les équations des mouvements mettent en jeu des dérivations par rapport au temps, or  $I_0$  est constant. En fait il introduit une discontinuité lors de l'inversion de sens de la tension de commande du moteur, on essaiera de la compenser partiellement par

l'introduction d'une non-linéarité dans le programme de gestion du variateur du moteur pour les faibles valeurs de la commande autour de zéro.

La représentation de Go est aussi supprimée parce dans les calculs des paramètres du moteur son influence a été introduite dans la valeur de l'amortissement  $f_v$ .

### Remarque importante :

Physiquement la rotation de **la roue notée par un angle  $\varphi$  est la même que la rotation de l'axe du moteur** puisqu'elle y est fixée. Ceci impose que la vitesse de rotation  $\omega$  soit égale à la vitesse de

rotation de la roue :  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

En reprenant les équations du modèle complet du moteur et en les adaptant pour le modèle simplifié retenu ici, on obtient :

$$V_e = R_b I_m + K_m v \omega \quad \text{et} \quad J \frac{d\omega}{dt} + f_v \omega = K_m c I_m - C_{ext}$$

Pour simplifier l'écriture on adopte la notation habituelle :  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$  et  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$  .

Les 2 relations deviennent :  $V_e = R_b I_m + K_m v \dot{\varphi}$  et  $J \ddot{\varphi} + f_v \dot{\varphi} = K_m c I_m - C_{ext}$  et en éliminant  $I_m$  entre ces 2 équations on obtient le couple produit par le moteur sur son axe en fonction de sa tension d'alimentation .

C'est le couple qui s'exerce sur le corps du gyropode  $C_{ext} = \frac{K_m c}{R_b} (V_e - K_m v \dot{\varphi}) - f_v \dot{\varphi} - J \ddot{\varphi}$  .

Ce couple s'exerce aussi sur la roue pour la mettre en rotation et engrainera la force de réaction du sol responsable de la force horizontale sur l'axe de la roue.

### Réaction du sol sur la roue.

Sous l'influence du couple moteur  $C_{ext}$ , la roue qui tourne sans glisser en se déplaçant suivant l'axe  $Ax$  parallèle au sol, a une énergie cinétique de rotation et de translation qui vaut :

$$\frac{1}{2} J_{roue} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M_{roue} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (J_{roue} + R M_{roue}) \dot{\varphi}^2$$

puisque  $x = R\varphi$  .

On en déduit par dérivation (du type équation de Lagrange) l'effet du couple moteur sur le mouvement de la roue :  $C_{ext} = (J_{roue} + M_{roue} R^2) \ddot{\varphi} + f_c \dot{\varphi} + F_{sol} R$  .

On a introduit un terme d'amortissement  $f_c \dot{\varphi}$  représentant la résistance du sol au mouvement.

En reprenant la valeur du couple moteur du paragraphe précédent on peut éliminer  $C_{ext}$  pour exprimer la composante horizontale de réaction du sol :

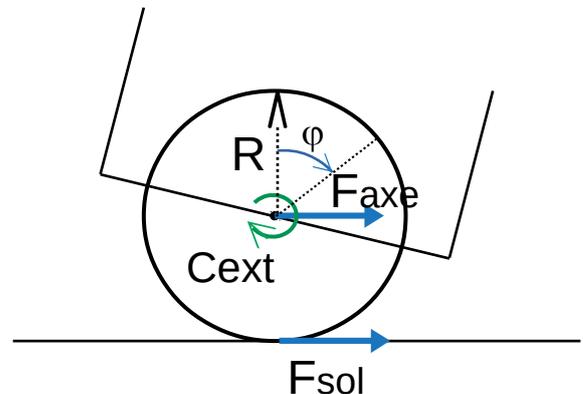
$$\frac{K_m c}{R_b} (V_e - K_m v \dot{\varphi}) - f_v \dot{\varphi} - J \ddot{\varphi} = (J_{roue} + M_{roue} R^2) \ddot{\varphi} + f_c \dot{\varphi} + F_{sol} R \quad \text{Soit :}$$

$$F_{sol} = \frac{1}{R} \left[ \frac{K_m c V_e}{R_b} - \left( \frac{K_m v K_m c}{R_b} + f_v + f_c \right) \dot{\varphi} - (J + J_{roue} + M_{roue} R^2) \ddot{\varphi} \right]$$

Cette force de réaction de sol produit l'accélération horizontale de la masse de la roue et la force horizontale sur l'axe. D'où l'on tire la force horizontale sur l'axe qui accompagne le couple

$$F_{axe} = F_{sol} - (M_{roue} \ddot{x})$$

moteur :

$$= \frac{1}{R} \left[ \frac{K_m c V_e}{R_b} - \left( \frac{K_m v K_m c}{R_b} + f_v + f_c \right) \dot{\varphi} - (J + J_{roue} + M_{roue} R^2) \ddot{\varphi} \right] - (M_{roue} \ddot{x})$$


## Mouvements du corps du gyropode établis à partir de la formulation de Lagrange.

Cette analyse se fait de façon analogue à celle qui a déjà été faite pour le calcul de la valeur du moment d'inertie du gyropode monté en balancier. La différence vient du fait du mouvement en balancier « la tête en bas », tandis que cette fois on veut le maintenir en position « debout ».

Afin d'établir les équations il nous faut connaître les expressions de l'énergie cinétique et potentielle qu'il est plus commode d'établir en fonction des deux grandeurs indépendantes : le déplacement  $x$  et l'inclinaison  $\theta$ .

L'énergie cinétique du corps du gyropode est la somme de l'énergie cinétique de translation calculée au centre de masse  $G$  et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse. Calculons les coordonnées cartésiennes du centre de masse  $G$  pour obtenir par dérivation la vitesse et l'énergie cinétique de translation.

La relation vectorielle  $\vec{AG} = \vec{AX} + \vec{XO} + \vec{OG}$  donne une abscisse pour  $G$  :  $x_G = x + OG \sin(\theta)$  et une ordonnée  $y_G = R + OG \cos(\theta)$

Les vitesses suivant ces axes s'en déduisent :

$$v_{xg} = \dot{x} + \dot{\theta} OG \cos(\theta) \quad , \quad v_{yg} = -\dot{\theta} OG \sin(\theta)$$

La valeur du carré de la vitesse de  $G$  est :

$$v_G^2 = v_{xg}^2 + v_{yg}^2 = \dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 OG^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} OG \cos(\theta)$$

et l'énergie cinétique de translation au centre de masse

$$E_{cintrans} = \frac{1}{2} M_{corps} (\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 OG^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} OG \cos(\theta))$$

L'angle de rotation du corps du gyropode est  $\theta$ , et en reprenant la notation  $J_{corps}$  pour son moment d'inertie autour de  $G$ , l'énergie cinétique de rotation autour de l'axe passant par le centre de masse  $G$  s'écrit :

$$E_{cinrot} = \frac{1}{2} J_{corps} (\dot{\theta}^2) \quad .$$

L'énergie cinétique totale du corps du gyropode devient  $E_{cintotale} = E_{cintrans} + E_{cinrot}$  :

$$E_{cintotale} = \frac{1}{2} ((J_{corps} + M_{corps} OG^2) \dot{\theta}^2 + M_{corps} \dot{x}^2 + 2 M_{corps} \dot{x} \dot{\theta} OG \cos(\theta)) \quad .$$

L'énergie potentielle du corps du gyropode ne dépend que de l'inclinaison  $\theta$  puisque la hauteur de l'axe des roues  $O$  est constante. L'énergie potentielle est maximale quand  $\theta$  vaut zéro, et en choisissant une référence nulle pour  $\cos(\theta) = 0$  . On obtient  $E_{pot} = g M_{corps} OG \cos(\theta)$  .

Le lagrangien du corps du gyropode est l'énergie cinétique totale moins l'énergie potentielle :

$$Lag = \frac{1}{2} ((J_{corps} + M_{corps} OG^2) \dot{\theta}^2 + M_{corps} \dot{x}^2 + 2 M_{corps} \dot{x} \dot{\theta} OG \cos(\theta)) - g M_{corps} OG \cos(\theta) \quad .$$

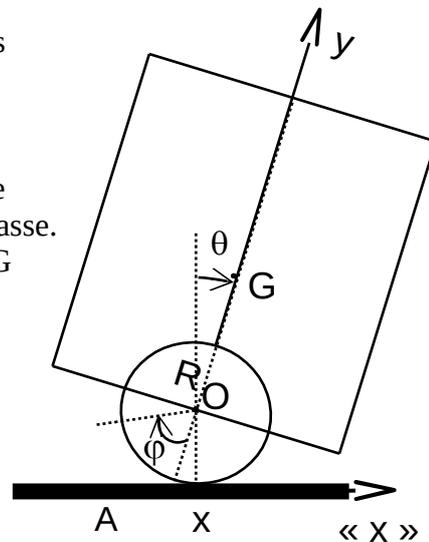
Il est maintenant possible d'écrire les équations du mouvement du gyropode :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial Lag}{\partial \theta} \right) = -2 C_{ext}$$

Les coefficients 2 interviennent parce qu'il y a 2 moteurs qui

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial Lag}{\partial x} \right) = 2 F_{axe}$$

fonctionnent ensemble. Le signe « moins » de  $C_{ext}$  signifie que son accroissement fait un effet dans



Inclinaison  $\theta$  et rotation  $\varphi$  de la roue avec déplacement  $Ax = R(\theta + \varphi)$

le sens négatif sur la variation de  $\theta$ , alors que l'accroissement de  $F_{axe}$  a un effet dans le sens positif sur le déplacement  $x$ .

Afin de rendre les équations du mouvement homogènes en fonctions des variables choisies qui sont le déplacement  $x$  et l'inclinaison  $\theta$ , la rotation de l'axe de roue  $\varphi$  est remplacée par  $\varphi = \frac{x}{R} - \theta$  dans ces équations.

L'écriture des équations est devenue longue et c'est avec l'aide de Mathematica que la suite des calculs sont développés : **le fichier concerné se nomme EqGyropodeSynthese.nb**. Il est associé à ce texte.

Le principe du calcul est le suivant :

La dérivation des expressions de Lagrange contient des dérivées seconde des variables d'inclinaison  $\theta$  et de déplacement  $x$ . Afin de connaître le comportement du gyropode sous l'action de la pesanteur et de la tension d'alimentation du moteur, qui est le seul contrôle que l'on dispose, nous utilisons la représentation d'état du système.

La représentation d'état est une forme d'écriture matricielle des équations différentielles du mouvement sous la forme  $[\dot{X}] = [A][X] + [B]U$

$[X]$  est le vecteur d'état. Il doit contenir toutes les variables qui apparaissent dans les équations différentielles jusqu'à leur degré maximum de dérivation moins 1. Dans ce cas le vecteur d'état sera formé de :  $x, x', \theta, \theta'$ .

La recherche du comportement du gyropode se fait par la résolution de cette équation matricielle afin d'obtenir le vecteur d'état  $[X]$  qui contient en particulier les variables  $x$  et  $\theta$  qui indiquent la position et l'inclinaison du gyropode, que l'on veut contrôler.

Afin d'obtenir ces équations d'état, il suffit de manipuler (opération pas toujours facile) les équations du mouvement pour les mettre sous la forme requise :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \end{bmatrix} [Ve]$$

Si les termes qui apparaissent dans les expressions de  $C_{ext}$  ou  $F_{axe}$  sont tous à coefficients constants devant les variables ou leur dérivées, il est ennuyeux de constater que les dérivations de l'expression de Lagrange, dont le résultat est reproduit ci-dessous contient des termes non linéaires, rendant impossible l'obtention d'une solution analytique des équations d'état.

$$\begin{aligned} (J_{corps} + M_{corps} OG^2) \ddot{\theta} + M_{corps} OG \cos(\theta) \ddot{x} - g M_{corps} OG \sin(\theta) &= -2C_{ext} \\ M_{corps} (\ddot{x} + OG \cos(\theta) \ddot{\theta} - OG \sin(\theta) \dot{\theta}^2) &= 2F_{axe} \end{aligned}$$

Le but du gyropode est de pouvoir se stabiliser au voisinage de la position « debout », c'est à dire, la position verticale voisine de  $\theta = 0$ . Afin de résoudre plus commodément les équations d'états, compte tenu de cette remarque, les équations non linéaires sont développées au premier ordre en  $\theta$  et  $\theta'$ .

Ainsi  $\cos(\theta) \rightarrow 1, \sin(\theta) \rightarrow \theta, \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \rightarrow 0$ , il en résulte les expressions linéarisées :

$$\begin{aligned} (J_{corps} + M_{corps} OG^2) \ddot{\theta} + M_{corps} OG \ddot{x} - g M_{corps} OG \theta &= -2C_{ext} \\ M_{corps} (\ddot{x} + OG \ddot{\theta}) &= 2F_{axe} \end{aligned}$$

Le remplacement de  $C_{ext}$  et  $F_{axe}$  par les valeurs des paragraphes précédents permet de mettre les équations différentielles linéaires sous la forme de matrice d'état. Cependant le calcul donne des expressions longues à écrire, et pour éviter des erreurs, c'est à l'aide de Mathematica que chacun de paramètres « aii » et « bii » ont été calculés.

En raison de la longueur du résultat, les expressions obtenues ne sont pas reproduites dans ce texte, on peut les retrouver dans le fichier associé : **EqGyropodeSynthese.nb** .

Seule la forme numérique du résultat, obtenue d'après les valeurs numériques caractérisant le fonctionnement du moteur et l'action de la pesanteur est retranscrite .

Les valeurs numériques des paramètres retenus sont : (roues de 88mm de diamètre)

$g=9,81$	$K_{mv}=0,4561$	$K_{mc}=0,25$	$J_{corps}=1,84 \cdot 10^{-3}$	$R_b=2,0$
$J=3,7 \cdot 10^{-3}$	$M_{corps}=1,0$	$R=0,044$	$OG=0,0375$	$f_c=4,52 \cdot 10^{-3}$
$M_{roue}=0,052$	$J_{roue}=4,21 \cdot 10^{-5}$	$f_v=4,52 \cdot 10^{-3}$		

Et le résultat :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10,0888 & 1,37088 & 0,443905 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 141,78 & 51,3818 & -6,23831 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,7684 \\ 0 \\ -14,0504 \end{bmatrix} [V_e]$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice  $[A]$  est aussi reporté ici, parce qu'elles sont aussi les pôles des fonctions de transfert du système sans stabilisateur. Les quatre valeurs numériques sont :  $[-16,8682, 6,77648, -6,23532, 0]$  Elles sont toutes de valeur réelle mais l'une d'elle est positive, indiquant que le système a un pôle instable, réalité physique bien visible du gyropode : il ne tient pas « debout » naturellement.

Pour que le gyropode tienne en équilibre « debout » il nous faut un stabilisateur qui élabore une tension de commande  $V_e$  du moteur, en fonction de l'état physique du gyropode.

L'état est caractérisé en position par son abscisse  $x$  et sa vitesse horizontale, en inclinaison par  $\theta$  et sa dérivée. Un capteur de rotation et de vitesse de rotation de l'axe moteur seront utilisés pour cela, ainsi qu'un accéléromètre et un gyroscope pour mesurer l'inclinaison  $\theta$  et sa dérivée.

Les éléments physiques permettant le contrôle de la tension moteur seront décrits dans un chapitre suivant.

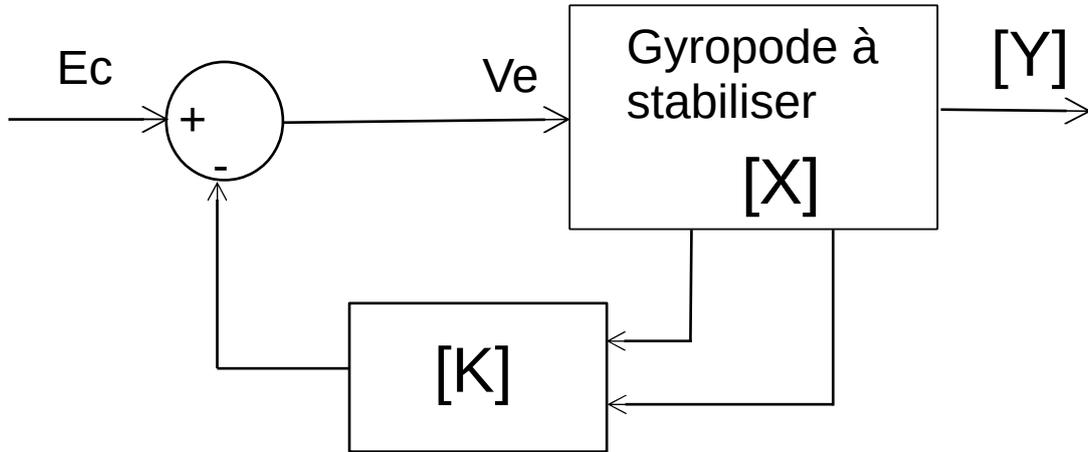
Ici nous cherchons à stabiliser simplement le gyropode. S'il est écarté de la position d'équilibre recherchée : verticale « debout » et au repos, c'est à dire tous les termes du vecteur d'état  $[X]$  à 0, il faut générer une commande de retour d'état  $V_e = -[K] [X]$  .

$V_e$  est un scalaire,  $[X]$  un vecteur colonne de 4 lignes, donc  $[K]$  sera un vecteur ligne de 4 termes  $[K] = [K_0 \ K_1 \ K_2 \ K_3]$

La méthode de calcul du stabilisateur choisie est la méthode LQR . Pour effectuer le calcul et évaluer les conditions d'optimisation du régulateur, c'est le logiciel Matlab qui est utilisé.

### Critères utilisés pour le calcul des coefficients du retour d'état du stabilisateur.

L'ensemble d'une régulation d'un dispositif représenté par sa matrice d'état peut être représenté suivant le schéma suivant :



Le bloc gyropode est commandé par la tensions appliquée aux deux moteurs,  $[X]$  est son vecteur d'état, contenant les variables de position et d'inclinaison ainsi que leurs dérivées premières. La sortie  $[Y]$  contient les variables intéressantes pour situer le gyropode, en particulier sont inclinaison qui doit rester proche de  $\theta = 0$ , (c'est la position verticale « debout »), et la variable  $x$  de position qui situe l'emplacement du gyropode. Cette sortie  $[Y]$  n'a pas besoin d'être précisée actuellement car elle n'intervient pas dans la stabilisation du gyropode.

La stabilisation consiste à rechercher quelles sont les conditions pour que le gyropode, en l'absence de consigne extérieure (c-à-d  $E_c = 0$ ), conserve sa position d'équilibre et y revient s'il est soumis à de petites perturbations telles qu'une variation de l'inclinaison ou de la position sous l'action d'éléments extérieurs.

Pour cela on peut examiner les expressions des fonctions de transfert du système, en particulier depuis la consigne  $E_c$  vers les variables de sortie.

En l'absence de retour d'état (c-à-d  $[K] = 0$ ) on dispose des relations :

$[\dot{X}] = [A][X] + [B]V_e$  et la sortie envisagée  $[Y]$  découle des grandeurs d'état par une matrice de coefficients constants  $[C]$  tel que  $[Y] = [C][X]$

Le transfert depuis la commande  $V_e$  vers la sortie  $[Y]$  est étudié dans l'espace de Laplace. En notant  $s$  la variable de Laplace, les expressions précédentes deviennent :

$s[X] = [A][X] + [B]V_e$  où  $[X]$  et  $V_e$  ne sont plus des fonctions du temps mais de  $s$ , qui donnent  $[s[I] - [A]][X] = [B]V_e$ , et la valeur de l'état en fonction de la tension d'entrée  $V_e$ ,  $[X] = ([s[I] - [A]])^{-1}[B]V_e$ .

La valeur de la sortie s'en déduit  $[Y] = [C][X] = [C]([s[I] - [A]])^{-1}[B]V_e$ .

Dans ce cas on note que la fonction de transfert est :

$$[P] = \frac{1}{\det([s[I] - [A]])} [C][\text{cof}([s[I] - [A]])^T][B]$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert est le déterminant de la matrice  $([s[I] - [A]])$ . Les valeurs qui annulent ce déterminant sont donc les pôles de la fonction de transfert. On remarque que cette expression est la même que celle que l'on doit écrire pour calculer les valeurs propres de la matrice  $[A]$ .

La conclusion de ceci est que les valeurs propres de la matrice  $[A]$  sont les pôles de la fonction de transfert du système seul ( $[K] = 0$ ). Pour qu'il soit stable il faudrait que toutes ses valeurs propres aient une partie réelle négative. Ce n'est pas le cas, l'une d'elle vaut : +6,77648.

L'introduction du retour d'état  $[K]$  permet de changer les fonctions de transferts, qui vont cette fois relier la commande  $E_c$  à la sortie  $[Y]$ . Le but est d'obtenir pour cet ensemble un système devenu stable, c-à-d, des fonctions de transfert dont tous les pôles aient des parties réelles négatives.

L'expression de ces fonctions de transfert se calcule comme précédemment en notant que cette fois

$$V_e = E_c - [K][X] .$$

En reportant dans l'expression précédente

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B](E_c - [K][X]) = ([A] - [B][K])[X] + [B]E_c$$

Et en écrivant dans l'espace de Laplace :

$$[X] = ([sI] - ([A] - [B][K]))^{-1} [B]V_e$$

En comparant à l'expression du système sans retour d'état, il apparaît que le rôle de la matrice  $[A]$  est remplacé par  $([A] - [B][K])$ . Cette fois les pôles des fonctions de transfert deviennent les valeurs propres de la matrice  $([A] - [B][K])$ .

La condition nécessaire pour que le gyropode ait une position stable « debout » est de trouver et choisir une matrice  $[K]$  telle que les valeurs propres de  $([A] - [B][K])$  aient toutes une partie réelle qui soit négative.

Physiquement, la position stable du gyropode debout, est un système à l'arrêt, en position verticale telle l'angle  $\theta$  soit égal à 0. Puisque les variables d'état choisies sont  $(x, x', \theta, \theta')$ , cet état stable est décrit par toutes ces variables à zéro. Ceci implique une tension de commande  $V_e$  du moteur nulle, sinon sa rotation entraînerait au moins un déplacement et ferait varier au moins  $x$  et  $x'$ .

La tension de commande du moteur répond à l'équation  $V_e = E_c - [K][X]$ . Puisque la position stable du gyropode est décrite par  $[X] = 0$  et  $V_e = 0$ , le gyropode est stabilisé au repos par une commande  $E_c$  aussi égale à zéro.

Si une perturbation extérieure l'oblige à changer de position  $x$  ou l'incline, le régulateur  $[K]$  devra le ramener à sa position de repos.

Une méthode recommandée pour estimer les valeurs du régulateur  $[K]$  est la méthode LQR. Bien sûr, elle permet de trouver des solutions pour les valeurs des coefficients de  $[K]$  qui satisfassent les conditions sur les pôles de la fonction de transfert, mais aussi des solutions robustes, (qui satisfassent les conditions de stabilité même si les données de la matrice d'état sont un peu inexactes à cause des incertitudes, ou de variations temporaires) et, dans une certaine mesure, de privilégier la précision et la rapidité du retour à la position stable après une perturbation.

Ici, il apparaît intéressant de privilégier en premier lieu l'inclinaison  $\theta$ , parce qu'il est certain qu'une inclinaison trop forte demandera aux moteurs une accélération plus grande que celle qu'il peuvent fournir, et aussi parce que le calcul de la matrice d'état a été obtenu en linéarisant les expressions en  $\theta$ , ce qui la rendra de plus en plus erronée quand  $\theta$  augmentera.

En second lieu, on peut aussi essayer d'avoir un retour du gyropode à son lieu de départ si une perturbation l'en a écarté, ce qui conduit aussi à s'intéresser à la réponse du régulateur pour une perturbation de position  $x$ .

La méthode LQR propose de minimiser une intégrale d'optimisation définie par :

$$J = \int_0^{\infty} ([X]^T [Q] [X] + [U]^T [R] [U]) dt \quad \text{où } [X] \text{ est le vecteur d'état, et } U \text{ la commande, ici c'est } V_e.$$

L'approche la plus simple consiste à choisir pour  $[Q]$  et  $[R]$  des matrices diagonales.  $[R]$  se résume à un simple coefficient :  $r$ , puisque la commande  $U = V_e$  est scalaire.

La matrice carrée  $[Q]$  prend la forme de

$$\begin{matrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{matrix} \quad \text{et l'intégrale } J \text{ est alors :}$$

$$J = \int_0^{\infty} (q_1 x^2 + q_2 \dot{x}^2 + q_3 \theta^2 + q_4 \dot{\theta}^2 + r V_e^2) dt$$

On peut interpréter les coefficients  $q_1, q_2, q_3, q_4$  comme les coefficients qui interviennent dans le choix de l'importance que l'on veut donner aux variables d'état et à la grandeur de la commande  $V_e$ .

D'après ce qui vient d'être dit, après avoir arbitrairement donné à  $r$  la valeur numérique de 1, on choisira d'abord pour  $q_3$  une valeur assez élevée, et aussi pour  $q_1$ .

La recherche des solutions des coefficients de  $[K]$  qui conduisent aux pôles des fonctions de transfert satisfaisant les conditions de stabilité et le minimum de la fonction d'optimisation  $J$  est confiée à Matlab, parce que le calcul est fort complexe.

Le choix des coefficients  $K_1, K_2, K_3, K_4$  formant le retour d'état  $[K]$  en fonction des choix de la matrice  $[Q]$  est finalement adopté après plusieurs calcul de test et de graphes montrant la qualité et la vitesse de retour à la position stable après perturbation sans que la commande  $V_e$  (limitée à plus ou moins 12 volts) soit trop sollicitée.

Le programme de calcul Matlab est joint à ce texte dans le même répertoire.

Finalement les coefficients retenus dans la diagonale de la matrice  $[Q]$  sont :

Après il est nécessaire de transformer l'expression de l'état du système pour tenir compte du fait que la stabilisation par le microcontrôleur ne vient modifier la valeur de la commande que périodiquement. C'est une commande à temps discret.

D'autre part, le capteur accéléromètre gyroscope utilisé : MPU6050, dans la configuration qui lui a été donnée, (voir le programme Arduino) donne une nouvelle mesure toutes les 10 millisecondes.

Cette mesure est indiquée par un signal qui peut générer une interruption du microcontrôleur. C'est tout naturellement cette période de 10 ms qui a été choisie comme période d'échantillonnage pour la mesure de l'état du gyropode et pour le rafraîchissement de la commande moteur.

Le logiciel Matlab, après indication de la valeur de cette période, calcule aisément la matrice d'état digitalisée, et la valeur des coefficients de  $[K]$  de cette commande à temps discret.

Le résultat obtenu, avec les valeurs numériques précédentes sont :

$K_1 = , K_2 = , K_3 = , K_4 = .$

Sources d'inspiration :

Pour apprendre Matlab et des notions d'automatique :

Fascicule : « Matlab pour le signal », formation GANIL organisée par l'ENSICAEN : Eric Pigeon, Olivier Gehan.

Livre : Commande des systèmes. Performance et robustesse. Par Henri Bourlès et Hervé Guillard, éditions Ellipses.

Pour l'écriture des équations d'état du gyropode :

« Modélisation et régulation d'un pendule inversé. » par Freddy Mudry.

Ref : [http://freddy.mudry.org/public/NotesApplications/na\\_pendinvc.pdf](http://freddy.mudry.org/public/NotesApplications/na_pendinvc.pdf)

et des exemples de Matworks

[http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?](http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling)

[example=InvertedPendulum&section=SystemModeling](http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling)

Pour la construction du gyropode, la programmation et l'utilisation de la librairie MPU6050 avec Arduino :

<http://www.instructables.com/id/2-Wheel-Self-Balancing-Robot-by-using-Arduino-and-/>

**Comme quoi : je n'ai pas inventé le fil à couper le beurre !!!!**